

FUNDACIÓN RENAULT
INSTITUTO DE FORMACION SUPERIOR
CÓRDOBA - ARGENTINA

MATEMÁTICA

Cursillo de Ingreso 2012

Profesora Titular: RUIZ, MIRYAM

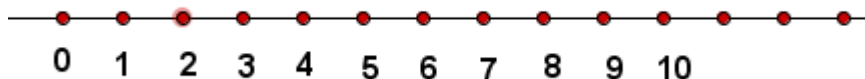
NÚMEROS REALES

INTRODUCCIÓN

Cualquier cálculo que deseamos hacer depende de las propiedades del sistema de los números reales.

Los números reales pueden ser representados geoméricamente como puntos sobre una recta.

Se acostumbra comenzar eligiendo dos: un punto que corresponda al 0 y otro que corresponda al número 1.



Usaremos el símbolo \mathbb{R} para denotar indistintamente del sistema de los números reales o la recta real.

Las propiedades de los números reales pueden dividirse en: Las propiedades **algebraicas**, la de **ordenamiento** y la de **completitud**.

Las propiedades algebraicas son aquellas con las que estamos más familiarizados. Estas propiedades nos aseguran que los números reales pueden sumarse, multiplicarse y dividirse, y de esa manera producir nuevos números reales.

La propiedad de ordenamiento se refiere al orden en que aparecen los números reales en la recta real. Si x aparece a la izquierda de y decimos que x es menor que y ($x < y$) o que y es mayor que x ($y > x$).

La propiedad de completitud es más difícil de entender pero nos dice que no puede haber “agujeros” en la recta real, o sea que a cada punto le corresponde un número real.

Distinguiremos los siguientes subconjuntos de números reales:

- El conjunto de los números naturales, que es el conjunto formado por los números: $1, 2, 3, \dots$. Lo denotaremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de números racionales, que es el conjunto formado por los cocientes de números enteros con denominador no nulo. En símbolos:
 $\mathbb{Q} = \{p/q, \text{ tal que } p \text{ y } q \text{ pertenecen a } \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$
- El conjunto de números irracionales (\mathbb{I}) que es el conjunto de todos los números reales que no son racionales, como por ejemplo: $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$

Decimos entonces, que 1 pertenece a \mathbb{N} o, en forma abreviada, $1 \in \mathbb{N}$. Observe que \mathbb{N} está incluido en \mathbb{Z} , o sea que todo elemento que pertenece a \mathbb{N} también pertenece \mathbb{Z} . La inclusión la denotaremos \subset y diremos que \mathbb{N} es un subconjunto de \mathbb{Z} o, en forma abreviada $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Los conjuntos de los números arriba mencionados satisfacen que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad e \quad i \subset \mathbb{R}.$$

EJERCICIOS

1. Ubique los siguientes números sobre la recta real.

- a) -1,5
- b) 3
- c) 2,1
- d) $\sqrt{2}$
- e) $-2/5$
- f) π

2. ¿Cuál de los números es mayor?

- a) e ó 3
- b) $\sqrt{15}$ ó 4
- c) 6.2 ó $\sqrt{41}$

NÚMEROS ENTEROS: OPERACIONES ELEMENTALES

En muchas situaciones prácticas nos hemos visto en la necesidad de introducir números negativos, por ejemplo:

- La temperatura es de 10°C bajo cero o la temperatura es de -10°C
- La cantidad de población disminuyo en 150 personas, o el cambio en la población fue de -150 personas.

Asociamos los números negativos con el concepto de **disminución**. Entonces, a un número natural a le asociamos un número negativo, su opuesto, $-a$ definido de manera que

$$a + (-a) = 0$$

Esta definición de opuesto se extiende a \mathbb{Z} , es decir que esta definición es válida para los números a tanto positivos como negativos y el cero.

EJEMPLOS

- 1) El opuesto de 2 es -2
 - 2) El opuesto de -5 es 5, o sea $-(-5) = 5$
 - 3) El opuesto de 0 es 0, o sea $-0 = 0$.
-

Al hacer esto podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos enteros.

EJEMPLOS

Calcule

1. $23 + (-12)$

2. $-35 + (-12)$

Solución. Sumar -12 es lo mismo que restar su opuesto, o sea 12.

1) $23 + (-12) = 23 - 12 = 11$

2) $-35 + (-12) = -35 - 12 = -47$

Podemos definir en general la resta de dos números enteros como una suma.

EJEMPLOS

Calcule

1) $9 - (-15)$

2) $-35 - (-15)$

3) $-1256 - (-47)$

Solución:

1) Restar -15 es lo mismo que sumar su opuesto, o sea 15. Resulta entonces
 $9 - (-15) = 9 + 15 = 24$

2) $-35 - (-15) = -35 + 15 = -20$

3) Observe en el ejercicio 2 que $-20 = -(35 - 15)$ por lo tanto $-35 + 15 = -(35 - 15)$.
Teniendo esto en cuenta podemos resolver el ejercicio 3

$$-1256 - (-47) = -1256 + 47 = -(1256 - 47) = -1209$$

Extenderemos el concepto de multiplicación de números naturales a la multiplicación de números enteros.

Sabemos que significa 2×3 :

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 3 \times 2$$

Por lo tanto:

$$(-2) \times 3 = -2 - 2 - 2 = -6 = -(2 \times 3)$$

Ahora si al trabajar con enteros queremos conservar la propiedad conmutativa de la multiplicación de los números naturales debe cumplirse que:

$$2 \times (-3) = (-3) \times 2 = -3 - 3 = -6$$

Resumiendo, $(-2) \times 3 = 2 \times (-3) = -(2 \times 3) = -6$, o equivalentemente

$$-2 \times 3 = -3 \times 2 = -6$$

Nos queda solamente definir la multiplicación por el número 0 y la multiplicación de dos números negativos.

Para conservar la propiedad distributiva de los números naturales tendremos que definir

$2 \times 0 = 0$ y $(-3) \times (-2) = 6$, ya que:

$$2 \times 0 = 2 \times (3 + (-3)) = 2 \times 3 - 2 \times 3 = 0$$

Y

$$-6 = -3 \times 2 = -3 \times (4 - 2) = -3 \times (4 + (-2)) = -12 + (-3) \times (-2),$$

O sea que, para que el primer miembro de esta expresión sea igual al último, debe cumplirse que:

$$(-3) \times (-2) = 6$$

EJEMPLOS

1) En las siguientes expresiones, efectúe las operaciones indicadas.

a) $(-3) \times 6$ b) $3 \times (-6)$ c) $(-3) \times (-6)$

Solución:

a) $(-3) \times 6 = -(3 \times 6) = -18$

b) $3 \times (-6) = -(3 \times 6) = -18$

c) $(-3) \times (-6) = 3 \times 6 = 18$

2) Calcule el valor de la siguiente expresión cuando $x = -4$ e $y = 5$:

$$3(y + 2) - 3x + 4y$$

Solución. Cuando $x = -4$ e $y = -5$, tenemos que:

$$3(y + 2) - 3x + 4y =$$

$$3 \times (5 + 2) - 3 \times (-4) + 4 \times 5 = 3 \times 7 - 12 + 20 = 21 + 12 + 20 = 53$$

3) Calcule las siguientes potencias

a) $(-2)^3$ b) $-(-2)^3$ c) -2^4

Solución.

a) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

b) $-(-2)^3 = -(-8) = 8$

c) $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$

4) Calcule:

$$\{5 - 3[2 - (b - 1)]\}[3 - 2(2 - 5)], \text{ donde } b \text{ es un número cualquiera.}$$

Solución:

$$\begin{aligned} &= [5 - 3(2 - b + 1)][3 - 2(-3)] = [5 - 3(3 - b)](3 + 6) = \\ &= 9(5 - 9 + 3b) = 9(-4 + 3b) = -36 + 27b \end{aligned}$$

Resumimos en el siguiente cuadro las propiedades algebraicas de los números enteros (estas propiedades también son validas para los números reales).

Propiedades de la suma y el producto

- Propiedad conmutativa:

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

- Propiedad asociativa:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

- Propiedad distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac$$

- Regla de los signos:

$$(-a)b = a(-b) = -(ab)$$

$$(-a)(-b) = ab$$

Nota: En el cuadro a y b denotan dos números arbitrarios, para indicar su multiplicación se emplea indistintamente la notación " ab ", " $a \cdot b$ " o " $a \times b$ ". En general se usa la primera forma cuando se trabaja con letras y la tercera cuando se usan números; la segunda expresión debe evitarse al trabajar con números, cuando el símbolo "." pueda confundirse con el punto decimal.

EJERCICIOS

- 1) Determine

a) $(-3) \times (-7)$

b) $-3 - (-7)$

c) $3 \times (-7)$

d) $3 - (3 - 4)$

e) $(-2)^3 - (-2)^4 - (-1)^2$

f) $-(-3)^3 - 4^2$

- 2) Calcule el valor de la siguiente expresión cuando $x=2$, $y=-3$ y $z=-4$.

a) $6(y + x) - 2x + 3z$

b) $2x - 3y - 5(z - y)$

c) $3xy + 5xz - 9yz$

- 3) Si a y c son números arbitrarios, calcule

a) $3(5 - 9) + 11$

b) $2[-5(4 - 1) + 3]$

c) $3\{4 - 2[3 - 4(-2 + 4)]\}$

d) $\{5 - 3[2 - (a - 1)]\}\{3 - [2 - a(2 - 1)]\}$

e) $6\{5 - 4\{3 - 5[2 + 3(1 + a)]\}\}$

f) $a - [-c(2 - 1) - 1]$

4) La variación de la temperatura (ΔT) se define como la diferencia entre la temperatura final alcanzada menos la temperatura inicial a la que se hace referencia, es decir $\Delta T = T_f - T_i$. Calcule la variación de la temperatura si:

- a) La temperatura inicial es 21°C y la temperatura final es 32°C
- b) La temperatura inicial es 21°C y la temperatura final es 13°C
- c) La temperatura inicial es -3°C y la temperatura final es -29°C
- d) La temperatura inicial es -15°C y la temperatura final es 9°C
- e) La temperatura inicial es 10°C y la temperatura final es -20°C

FACTORES PRIMOS

Sabemos que no siempre es posible dividir un número natural a por otro b , distinto de 1 y de a , de manera que el resto de la división nos dé cero. Esto ocurre solamente cuando el dividendo a es un múltiplo del divisor b . En otras palabras:

Definición: Un número natural b es divisible por otro número natural a si existe otro número natural m tal que

$$B = m a$$

Decimos entonces que m y a son factores de b , o que m y a dividen a b .

Recordemos ahora los criterios de divisibilidad más usados:

Criterios de divisibilidad

- Un número natural es divisible por 2 si su última cifra lo es.
- Un número natural es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- Un número natural es divisible por 5 si su última cifra es 5 ó 0.

EJEMPLO

Sean los números 33 y 21. Ambos son divisibles por 3 ya que la suma de sus cifras es 6 y 3 respectivamente. Se puede escribir:

$$33 = 3 \times 11 \quad \text{y} \quad 21 = 3 \times 7$$

Vemos que 3 y 11 son factores de 33, y que 3 y 7 son factores de 21.

Los factores obtenidos en el ejemplo anterior no pueden ser, a su vez, expresados como productos de números naturales más chicos. Decimos entonces que son **factores primos**. La palabra “primo” quiere decir primero, más simple, básico.

Definición: Un número primo es un número natural que solamente puede ser dividido por la unidad y sí mismo.

Tomemos por ejemplo los diez dígitos: 1, 2 y 3 son primos. 4 no es primo, porque es divisible por 2 además de ser divisible por 1 y sí mismo. Los números 5 y 7 también son primos. No lo son el 6 (divisible por 2 y 3), el 8 (divisible por 2 y 4), el 9 (divisible por 3) ni el 10 (divisible por 2 y por 5).

A veces es necesario descomponer un número en sus factores primos. A continuación ejemplificaremos la forma en que esto se hace:

Sea el número 4620. Como su última cifra es par, es divisible por 2:

$$4620 = 2 \times 2310$$

Nuevamente como su última cifra es par, el número 2310 es divisible por 2, es decir $2310 = 2 \times 1155$. Ahora bien, 1155 es divisible por 3, o sea $1155 = 3 \times 385$. Por lo tanto,

$$4620 = 2 \times 3 \times 385$$

El número 385 no es divisible por 3 pero sí por 5, o sea $385 = 5 \times 77$. Resulta entonces,

$$4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 77$$

Finalmente, $77 = 7 \times 11$ y $4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

Hemos logrado escribir a 4620 como producto de números primos. Se dice entonces que se ha **descompuesto** 4620 en sus **factores primos**.

EJERCICIOS

Descomponga los siguientes números en sus factores primos:

- 1) 84
- 2) 16
- 3) 57
- 4) 1150
- 5) 256
- 6) 243

MÚLTIPLO COMÚN

Considere los números 7 y 21. Podemos construir infinidad de múltiplos comunes a ambos números, por ejemplo:

$$147 = 7 \times 21, \quad 294 = 2 \times 7 \times 21, \quad 42 = 2 \times 21 = 6 \times 7, \quad 21 = 1 \times 21 = 3 \times 7.$$

Todos estos números son **múltiplos comunes** de 21 y de 7, pero hay uno solo que es el menor de todos ellos, en este caso el 21. El menor de todos los múltiplos de dos o más números se lo llama **mínimo común múltiplo** y se lo denota mcm.

EJEMPLOS

1. Considere los números 42 y 66. El múltiplo de ambos más fácil de encontrar es $42 \times 66 = 2772$. Sin embargo, existe un múltiplo común considerablemente menor. Descomponiendo los números dados en factores primos tenemos

$$42 = 2 \times 3 \times 7, \quad 66 = 2 \times 3 \times 11.$$

Los números dados tienen factores comunes (2 y 3) y factores no comunes (7 en 42 y 11 en 66). Si se toman los factores comunes y no comunes obtenemos el número $2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$, el cual es múltiplo tanto de 42 como de 66:

$$462 = 42 \times 11 = (2 \times 3 \times 7) \times 11$$

2. Sean los números 28 y 80. Descomponiéndose en sus factores primos se obtiene

$$28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7 \quad \text{y} \quad 80 = 16 \times 5 = 2^4 \times 5$$

Para formar el mcm es necesario tomar a 2 con su mayor exponente (en caso contrario, el último resultante no sería múltiplo de 80) y los otros factores no comunes:

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7 = (2^2 \times 7) \times 2^2 \times 5 = 7 \times (2^4 \times 5)$$

De haber multiplicado 28 por 80 hubiéramos obtenido 2240, que es múltiplo de ambos pero considerablemente mayor (cuatro veces) que 560.

Podemos enunciar ahora la siguiente regla:

Para obtener el mcm de un conjunto de números se los descompone en sus factores primos y se multiplican todos los factores, comunes y no comunes, con su mayor exponente

EJERCICIOS

1) Encuentre el mcm de los siguientes pares de números:

- a) 819 y 663
- b) 3430 y 150
- c) 2057 y 3179
- d) 756 y 2520
- e) 525 y 1260
- f) 336 y 1890

2) Encuentre el mcm de los siguientes números

- a) 9, 8 y 20 b) 25, 47 y 40 c) 72, 60 y 16

NUMEROS RACIONALES: OPERACIONES ELEMENTALES

Con anterioridad hablamos de la divisibilidad de los números naturales y escribimos

$$21 = 3 \times 7$$

O equivalentemente

$$21 : 3 = 7 \quad \text{ó} \quad 21 : 7 = 3$$

El símbolo “:” está asociado con la división “exacta” (sin resto) de dos números enteros, por ejemplo:

$$(-21) : 3 = -7 \quad \text{ó} \quad 21 : (-3) = -7$$

Ya que

$$-21 = 3 \times (-7) = -3 \times 7$$

Cuando dos números naturales no son múltiplos uno del otro como en el caso de 7 y 3, la operación $7:3$ no está definida en el sentido que la división de estos dos números enteros no es

igual a otro número entero. Entonces, nos vemos obligados a introducir los “números fraccionarios”.

Decimos que:

- La quinta parte de 1 es $\frac{1}{5}$.
- $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
- La quinta parte de $\frac{1}{7}$ es $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
- $\frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times 2}{5 \times 7} = \frac{4}{35}$
- $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ Observe que 1 es el cociente de la división entera de 7 con 4 y que 3 es el resto.

Introduciremos el **inverso** de un número entero $a \neq 0$ como el número fraccionario que multiplicado por a nos dé 1, o sea:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Extendemos esta definición de inverso a \mathbb{Q} diciendo que el inverso de un número racional es otro racional tal que la expresión anterior sea cierta.

De esta manera, redefiniremos la división de dos enteros como la multiplicación de dos racionales. Además, podemos extender esta idea a la división de dos racionales, definiéndola como la multiplicación del primero por el inverso del segundo.

EJEMPLOS

1. En las siguientes expresiones, efectúe las operaciones indicadas

a) $\frac{-4}{2}$

b) $\frac{4}{-2}$

c) $\frac{-4}{-2}$

Solución:

a) $\frac{-4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ b) $\frac{4}{-2} = -\frac{4}{2} = -2$ c) $\frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2$

2. Indique el inverso de los siguientes números

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{-7}{6}$

Solución:

a) El inverso de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$ b) El inverso de $\frac{-7}{6}$ es $\frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$

3. Calcule

a) $\frac{1}{2} - \frac{6}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7}$ d) $\frac{2/3}{7/5}$

Solución:

a) $\frac{1}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1-6}{2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{14}$ d) $\frac{2/3}{7/5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

Sabemos que

$$\frac{12}{21} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

En palabras, que estos números son equivalentes. Por otra parte 12 y 21 tienen a 3 como común divisor, 8 y 14 a 2; mientras que 4 y 7 son primos entre sí (ya que el único divisor común que poseen es 1). Decimos que la última fracción está **simplificada**.

Los criterios de divisibilidad descriptos en la sección anterior nos permitirían reconocer divisores comunes de dos o más números naturales y de esta manera simplificar nuestros cálculos con los números racionales.

EJEMPLOS

1. Realice la siguiente división y déjela expresada como un número racional p/q donde p y q sean primos entre sí

$$\frac{-32/25}{4/5}$$

Solución:

$$\frac{-32/25}{4/5} = \frac{-32}{25} \times \frac{5}{4} = -\frac{32 \times 5}{25 \times 4} = -\frac{8 \times 4 \times 5}{5 \times 5 \times 4} = -\frac{8}{5}$$

Decimos entonces que hemos simplificado la expresión $\frac{-32/25}{4/5}$ lo máximo posible.

2. Factorice primero lo máximo posible y luego efectúe las operaciones que se indican en la siguiente expresión

$$\frac{5(44 - 28)}{160}$$

Deje expresado el resultado como un número racional p/q donde p y q sean primos entre si

Solución:

$$\frac{5(44 - 28)}{160} = \frac{5(4 \times 11 - 4 \times 7)}{160} = \frac{5 \times 4(11 - 7)}{4 \times 4 \times 10} = \frac{5 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Cuando se suman o restan fracciones de distinto denominador es necesario expresarlas a todas usando un mismo denominador (**denominador común**), que es un múltiplo común de todos los denominadores.

Para evitar trabajar con números excesivamente grandes se usa el menos de todos los múltiplos comunes, o sea el mcm.

Usaremos el mcm para sumar fracciones

EJEMPLO

Resuelva la siguiente suma de fracciones sacando mcm y simplifique lo máximo posible:

$$\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{2}{15} - \frac{1}{20}$$

Solución:

Primero descomponemos los denominadores en sus factores primos:

$$\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{2}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \times 3} + \frac{3}{2^2} + \frac{2}{3 \times 5} - \frac{1}{2^2 \times 5}$$

Tomamos como común denominador al mcm:

$$= \frac{1 \times 5 + 3 \times 3 \times 5 + 2 \times 2^2 - 1 \times 3}{2^2 \times 3 \times 5}$$

Resolvemos el numerador:

$$= \frac{5 + 45 + 8 - 3}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{55}{2^2 \times 3 \times 5}$$

Factorizamos el numerador para simplificar lo máximo posible:

$$= \frac{5 \times 11}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{2^2 \times 3} = \frac{11}{12}$$

Resumimos en el siguiente cuadro las propiedades de la suma y el producto de los números racionales:

Propiedades de la suma y el producto

- Suma (resta) de fracciones de igual denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

- Producto (cociente) de fracciones:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Sí $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

- Suma (resta) de fracciones de distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{bd}$$

EJERCICIOS

1) Indique el inverso de los siguiente números

a) $\frac{-8}{3}$ b) -9 c) $\frac{1}{5}$

2) Calcule:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

b) $-33 + 12 - 5\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$

c) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$

d) $\frac{3/4}{5/7}$

- 3) Realice las siguientes divisiones y déjelas expresadas como un número racional p/q donde p y q sean primos entre sí.

a) $\frac{22/3}{11/27}$

b) $\frac{5(6/7)(7/8)}{7/8}$

c) $\frac{5+2(32-22)}{5(3+4)}$

d) $\frac{3(49+14)}{21}$

e) $\frac{4(35-14)}{9(35+49)}$

f) $\frac{(36-24)(21+18)}{13(28+32)}$

- 4) Encuentre las siguientes sumas de fracciones sacando el mcm y exprese en la forma p/q donde p y q sean primos entre sí.

a) $\frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) - \frac{5}{6} \right]$

b) $-\frac{3}{4} \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$

c) $\frac{1}{57} + \frac{4}{33}$

d) $\frac{3}{22} - \frac{1}{57}$

e) $\frac{-13}{385} + \frac{1}{77} - \frac{2}{35}$

f) $-\frac{2}{15} + \frac{3}{25} + \frac{7}{30}$

POTENCIAS Y RAICES

Si a es un número real y n es un número natural entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a . Por ejemplo:

$$a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Decimos entonces que a^n es una potencia que tiene a como **base** y n como **exponente**. Ahora extendemos la definición a los números enteros definiendo:

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

Reglas para las potencias

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ entonces:

- 1) $a^n a^m = a^{n+m}$
- 2) $(a^n)^m = a^{nm}$
- 3) $(ab)^n = a^n b^n$
- 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
- 5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Estas reglas pueden fácilmente demostrarse a partir de la definición ya dada. Como ejercicio demuestre las reglas.

Observe que la definición de $a^0 = 1$ es consistente con que

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

EJEMPLOS

1) $(-2)^2 = ((-1) \times 2)^2 = (-1)^2 \times 2^2 = 4$

2) $(-2)^3 = ((-1) \times 2)^3 = (-1)^3 \times 2^3 = -8$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

4) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

5) Simplifique $\frac{(6x^2)^3}{(4x^3)^2}$ usando las reglas de la potencia.

Solución:

$$\frac{(6x^2)^3}{(4x^3)^2} = \frac{6^3(x^2)^3}{4^2(x^3)^2} = \frac{6^3x^6}{4^2x^6} = \frac{6^3}{4^2} = \frac{2^33^3}{2^4} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$$

Atención:

$$(a \pm b)^n \text{ no es igual a } a^n \pm b^n$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, arbitrarios. Por ejemplo:

$$(2 + 3)^3 = 5^3 = 125 \text{ no es igual a } 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$$

EJERCICIOS

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

3) $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^2$

4) $\left(\frac{3/2}{5/3}\right)^2$

5) $\left(\frac{b/a}{c/a}\right)^2$

6) $(-2)^{-2} - 5^{-2}$

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2^{-4} - \frac{1}{2^3}$

8) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{-7}\right)^{-2}$

$$9) \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)+1}{a-\left(\frac{2}{3}\right)} \right]^{-1}$$

$$10) \left[\frac{(2xz^{-2})^3(x^{-2}z)}{2xz^2} \right]^4$$

RAICES CUADRADAS

Supongamos que queremos saber cuál es el lado de un terreno cuadrado cuya área es 1200 metros cuadrados.

O sea que buscamos un número positivo x tal que $x^2 = 1200$. Comenzaremos probando

$$\left. \begin{array}{l} 30^2 = 900 \\ 40^2 = 1600 \end{array} \right\} \text{ X se encuentra entre 30 y 40}$$

$$\left. \begin{array}{l} 35^2 = 1225 \\ 34^2 = 1156 \end{array} \right\} \text{ X se encuentra entre 34 y 35}$$

El valor más **próximo** que hemos encontrado es entre 34 y 35. Al valor **exacto** de x lo llamaremos raíz cuadrada y la denotaremos $\sqrt{1200}$. Por lo tanto

$$x^2 = (\sqrt{1200})^2 = \sqrt{1200} \times \sqrt{1200} = 1200$$

Decimos entonces que dado un número positivo a ,

$$\boxed{\sqrt{a} = b \text{ si y solamente si } b \geq 0 \text{ y } b^2 = a}$$

- ¿Es la raíz cuadrada de 25 igual a 5? Si, ya que $5 > 0$ y $5^2 = 25$
- ¿Es la raíz cuadrada de 25 igual a -5? No, puesto que a pesar de que $(-5)^2 = 25$, -5 es negativo.
- ¿Cuál es la raíz cuadrada de -9? No existe, ya que no hay ningún número positivo que, elevado al cuadrado, dé -9.

EJEMPLOS

1)

a) $-\sqrt{49} = -7$

b) $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{(-8) \times (-8)} = \sqrt{64} = 8$

c) $\sqrt{7} = 2,6457$

El último número es irracional por lo tanto para obtener una estimación del mismo usaremos una aproximación decimal, por ejemplo con dos decimales

$$\sqrt{7} \approx 2,65$$

2) Indique cuales son los números que satisfacen

a) $x^2 = 0,36$ b) $x^2 = \frac{4}{9}$ c) $x^2 = 11$

Solución:

a) $x^2 = 0,36 = 36 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$ (si y solamente si) $x = \pm 6 \times 10^{-1} = \pm 0,6$

b) $x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{3}$

c) $x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}, (x \approx \pm 3,1167)$

3) Calcule en forma exacta:

a) $\sqrt{20 + \sqrt{25}}$ b) $\sqrt{30 - \sqrt{25}}$

Solución:

a) $\sqrt{20 + \sqrt{25}} = \sqrt{20 + 5} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{30 - \sqrt{25}} = \sqrt{30 - 5} = \sqrt{25} = 5$

4) Simplifique lo máximo posible y de una respuesta exacta (sin aproximaciones) de la

expresión $\frac{15 + \sqrt{12 + 38}}{5\sqrt{11 - 2}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{15 + \sqrt{12 + 38}}{5\sqrt{11 - 2}} &= \frac{15 + \sqrt{2(6 + 19)}}{5\sqrt{9}} = \frac{15 + \sqrt{2 \times 25}}{5\sqrt{3^2}} = \frac{15 + \sqrt{2 \times 5^2}}{5 \times 3} = \frac{15 + \sqrt{2} \sqrt{5^2}}{5 \times 3} = \\ &= \frac{15 + 5\sqrt{2}}{3 \times 5} = \frac{15 + 5\sqrt{2}}{15} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Observe que el resultado obtenido es la mínima expresión y no se puede seguir simplificando.

Atención:

Si a y b son distinto de cero, $\sqrt{a+b}$ no es igual a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Por ejemplo:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ no es igual a } \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

RAICES CUALESQUIERA

Ya hemos definido la raíz cuadrada de un número. En forma similar definimos las raíces cúbicas, cuartas, etc.

- **Raíz cubica:**

$$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$$

En palabras, la afirmación “b es igual a la raíz cúbica de a” equivale a $b^3 = a$

- **Raíz cuarta:**

Dado un número positivo a

$$\sqrt[4]{a} = b \Leftrightarrow b^4 = a, b \geq 0$$

En palabras, la afirmación “b es igual a la raíz cuarta de a” equivale a $b^4 = a$

EJEMPLOS

- 1) $\sqrt[3]{27} = 3$
- 2) $\sqrt[3]{-27} = -3$
- 3) $\sqrt[4]{16} = 2$
- 4) $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{4^2} = 2$

En forma similar se definen las demás raíces. En vez del símbolo de raíz cuadrada se usa también el exponente fraccionario de 1/2; para la raíz cubica se usa 1/3, etc. Para los

exponentes fraccionarios arbitrarios vales las mismas reglas que para los exponentes enteros, cuando la base es un número real **positivo**.

EJEMPLOS

1) a) $(-32)^{1/5} = -2$ b) $64^{1/6} = 2$

2) a) $((-27)^{1/3})^2 = (-3)^2 = 9$

b) $4^{2/4} = 4^{1/2} = 2$

c) $(-4)^{1/2}$ no existe pero $((-4)^2)^{1/4} = 16^{1/4} = 4^{1/2} = 2$

Observe que en el último ejemplo la base no es positiva y por lo tanto no valen las reglas de las potencias.

Hasta aquí hemos definido a^x cuando x es un número racional y $a > 0$. Sin embargo uno puede demostrar que es posible definir a^x cuando $a > 0$ para todo número real x de tal manera que las siguientes reglas sean validas:

Reglas para las potencias con exponentes reales

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, entonces:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. $a^x > 0$ para todo x .

EJERCICIOS

1) Calcule:

a) $[(-2)^2]^{1/2}$

b) $[(-2)^6]^{1/3}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para poder manejarnos con números muy pequeños y muy grandes es mucho más cómodo usar un número decimal cuya parte entera sea una sola cifra (distinta de cero), multiplicado por potencias de 10.

EJEMPLOS

1) Escribe los números 2451,367 y 0,034581 en notación científica

Solución:

$$2451,367 = 2,451367 \times 10^3; \quad 0,034581 = 3,4581 \times 10^{-2}$$

2) Expresa $\frac{36 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-12}}{30 \times 10^{15} \times 10^{-6}}$ en notación científica

Solución:

$$\frac{36 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-12}}{30 \times 10^{15} \times 10^{-6}} = \frac{6^2 \times 5^2 \times 10^{-14}}{6 \times 5 \times 10^9} = 6 \times 5 \times 10^{-23} = 3,0 \times 10^{-22}$$

EJERCICIOS

1) Expresa los siguientes números en notación científica:

a) 3765,032

b) 0,000005681

c) $235,785 \times 10^{-2}$

d) $0,03486 \times 10^{-3}$

- 2) Exprese los siguientes números en notación científica sin usar calculadora y luego controle el resultado usándola

a) $\frac{25 \times 10^{12} \times 5 \times 10^{-32}}{12,5 \times 10^{15} \times 2 \times 10^{14}}$

b) $\frac{6 \times 10^9 \times 5 \times 10^8}{2,5 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-11}}$

c) $\frac{4 \times 10^{12} \times (5 \times 10^3)^2}{2,5 \times 10^5 \times (2 \times 10^{-10})^3}$

Observe que en algunas calculadoras sólo se escribe el número decimal y el exponente al que el número 10 está elevado, o sea que se sobreentiende que la base es 10.

NUMEROS IRRACIONALES

Definición: Todos los números que no se pueden escribir como a/b (con a y b números enteros, $b \neq 0$), se denominan números irracionales.

Los números irracionales más conocidos son:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

$$\pi = 3,141592653 \dots$$

Geoméricamente se puede representar a $\sqrt{2}$ como el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 y a π como el cociente entre el perímetro y el diámetro de cualquier círculo.

EJERCICIOS

Para la resolución de los siguientes ejercicios use, para comparar, los valores de $\sqrt{2}$ y π dados en el párrafo anterior. También podrá hacer uso de la calculadora.

- 1) En general, si k es un número racional positivo, \sqrt{k} es irracional. Teniendo esto en cuenta, determine cuales de los siguientes números son irracionales:

a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{6,4}$ c) $\sqrt{625}$ d) $\sqrt{2209}$

- 2) Los números racionales

$$\frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

Son aproximaciones al valor de $\sqrt{2}$.

- Eleve al cuadrado cada uno de estos números para ver cuánto se aproximan a 2
- ¿Cuál es el primer decimal en el desarrollo de $239/169$ que no coincide con $\sqrt{2}$?
- Deduzca el algoritmo de formación de la sucesión y dé una mejor aproximación que $239/169$

3) ¿Hasta qué cifra decimal las siguientes aproximaciones coinciden con el valor de π ?

- a) $22/7$ b) $355/113$

4) Algunos de los siguientes ejercicios están mal resueltos. Diga cuales y dé el resultado correcto.

a) $\frac{7 \times 11 \times 13 + 77}{26 \times 19 - 417} - \frac{42 \times 48 + 998}{1507} = 12$

b) $\left(\frac{576/144 + 2784/29}{313 - 11808/41} \right)^5 = 1024$

c) $\frac{8925 + (-5)^5}{25^2 + 100} = 8$

d) $\frac{1959 - (-6)^3}{4^3 + 3^4} = 15$

ECUACIONES

ECUACION CON UNA INCÓGNITA

Una ecuación con una *incógnita* es una igualdad en la que hay un número desconocido (la incógnita) que se representa por una letra.

Una **solución** de la ecuación es un valor de la incógnita para el que la igualdad es cierta.

Resolver una ecuación es encontrar su solución (o soluciones), o llegar a la conclusión que no tiene.

EJEMPLO

$$2x + 3 = 5(x - 3)$$

El número $x=6$ es solución porque, al sustituirlo en la ecuación, verifica la igualdad:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 + 3 &= 5(6 - 3) \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

El número $x=4$ no es solución porque, al sustituirlo en la ecuación, no verifica la igualdad:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 + 3 &= 5(4 - 3) \\ 11 &\neq 5 \end{aligned}$$

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

$2x + 3 = 5(x - 3)$ es de grado 1; se suele decir de *primer grado*.

$4 - x = 3x^2 + 5$ es de grado 2; de *segundo grado* o, también, *cuadrática*.

$(x + 2)(x + 3) = 0$ es de segundo grado porque, eliminando paréntesis, resulta:
 $x^2 + 5x + 6 = 0$

Es indistinto el orden en el que están escritos los sumandos de los miembros y estos se pueden intercambiar. $2x - 3 = 8$ es lo mismo que $8 = 2x - 3$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

La ecuación más sencilla posible es la que tiene la forma $ax = b$, cuya única solución es $x = \frac{b}{a}$.

EJEMPLO

$$-3x = 12 \quad \rightarrow \quad x = \frac{12}{-3} = -4$$

Cuando nos enfrentamos a una ecuación más complicada hay que empezar por transformarla en otras más simples que sean **equivalentes**.

Recuerda que dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución (o soluciones).

Para obtener ecuaciones equivalentes tendremos presentes que las ecuaciones son igualdades y, por lo tanto, cumplen la siguiente regla de transformación:

- Si a los dos miembros de una ecuación se le suma (o resta) una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente a la anterior.
- Si multiplicamos (o dividimos) los dos miembros por un mismo número distinto de 0, también se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO

Consideremos la ecuación $7x - 6 = 5x + 3$

- Sumamos 6 a ambos miembros:

$$\begin{aligned} 7x - 6 + 6 &= 5x + 3 + 6 \\ 7x &= 5x + 3 + 6 \\ 7x &= 5x + 9 \end{aligned}$$

Como consecuencia el número 6, que estaba en el primer miembro con signo -, ha pasado al segundo con signo +.

- Restamos $5x$ de ambos miembros

$$\left. \begin{aligned} 7x - 5x &= 5x + 9 + 5x \\ 7x - 5x &= 9 \\ 2x &= 9 \end{aligned} \right\}$$

El término $5x$, que estaba en el segundo miembro con signo $+$, ha pasado al primero con signo $-$.

Dividimos por 2 ambos miembros, para dejar la x sola en el primero

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x}{2} &= \frac{9}{2} \\ x &= \frac{9}{2} = 4,5 \end{aligned} \right\}$$

El 2, que estaba en el primer miembro multiplicando, ha pasado al segundo dividiendo.

Solución: $x = 4,5$

Hemos resuelto la ecuación siguiendo un proceso que se llama **despejar la incógnita**, el cual consta de 3 etapas:

- 1- Agrupar a un miembro todos los términos con x y en otro todos los números, usando para ello la regla de **trasposición**:

$$7x - 5x = 3 + 6$$

- 2- Reducir términos semejantes llegando a una ecuación del tipo $ax = b$.

$$2x = 9, \quad \text{siendo 2 el coeficiente de } x.$$

- 3- Finalmente dividir los dos miembros por el coeficiente de x , para obtener así la solución.

$$x = \frac{9}{2}$$

Comprobación. Si se han hecho bien las operaciones el valor hallado para x es la solución. No obstante lo sustituimos en la ecuación inicial para confirmarla.

$$\begin{aligned} 7 \cdot 4,5 - 6 &= 5 \cdot 4,5 + 3 \\ 25,5 &= 25,5 \end{aligned}$$

Efectivamente, se trata de la solución.

ECUACIONES SIN SOLUCIÓN

Generalmente, una ecuación de primer grado tiene una sola solución y solo una, aunque hay excepciones.

Por ejemplo, la ecuación $x = x + 5$ no tiene ninguna solución puesto que no existe ningún número que al sumarle 5 nos dé el mismo número.

Si intentamos resolverla llegaremos a una ecuación equivalente que no tiene solución:

$$x - x = 5$$

$$0x = 5$$

EJERCICIOS

1) Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución en cada caso:

a) $33 - 4x = -24 - 7x$

b) $4x = 9,6$

c) $12,5 = 6,3 - 2,4y$

d) $x + 12 - 13x = 15 + 4x - 2$

2) Despeja la letra x en cada una de las siguientes igualdades:

a) $mx + n = p$

b) $ax + b = cx + d$

ECUACIONES CON PARENTESIS Y DENOMINADORES

ECUACIONES CON PARENTESIS

Se comienza por eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva. Por ejemplo:

$$x + 9(x - 2) = 2 - 3(1 - 2x)$$

$$x + 9x - 18 = 2 - 3 + 6x$$

$$10x - 18 = -1 + 6x$$

$$4x = 17$$

$$x = \frac{17}{4} = 4,25$$

ECUACIONES CON DENOMINADORES

Para suprimir los denominadores de una ecuación, se multiplican los dos miembros por algún múltiplo de todos los denominadores, que de este modo serán cancelados.

Es preferible usar el mínimo común múltiplo, para que los coeficientes se mantengan pequeños.

EJEMPLO

$$2x - \frac{x}{6} = \frac{7x}{4} + 2$$

$$12 \cdot 2x - 12 \frac{x}{6} = 12 \frac{7x}{4} + 12 \cdot 2$$

$$24x - 2x = 21x + 24$$

Solución:

$$x = 24$$

ERRORES FRECUENTES

| | | | |
|------------------------|---|------------------|--------------------------------------|
| $\frac{3x}{4} + 2 = 5$ | ↙ | No $3x + 8 = 5$ | Hay que multiplicar los dos miembros |
| | ↘ | Sí $3x + 8 = 20$ | |

| | | | |
|-------------------------|---|----------------------|--|
| $4 - \frac{x-5}{2} = 3$ | ↙ | No $8 - x - 5 = 6$ | Lo que hay sobre una raya de fracción es como si estuviera dentro de un paréntesis |
| | ↘ | Sí $8 - (x - 5) = 6$ | |

EJERCICIOS

1) Resuelve estas ecuaciones y comprueba las soluciones halladas.

a) $2(x - 3) + 4(x + 5) = 6$

b) $2(2x + 1) = 4x$

c) $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

e) $-\frac{5}{2} = \frac{2x}{3}$

f) $\frac{x}{3} + 8 = x$

g) $\frac{3x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$

h) $\frac{x-1}{2} = \frac{4x+5}{3}$

i) $5(x + 3(x - 2)) = x - 2$

j) $(x - 3)x = x^2$

RESOLUCION DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

Un agricultor esta sembrando en su campo. El primer día siembra el 20% del mismo, el segundo día la tercera parte del resto y en ese momento le quedan 12 hectareas sin sembrar. ¿Cuál es la superficie total del campo?

Planteo de la ecuacion:

- 1- La cantidad que quiere hallarse es la incognita. Le asignamos una letra:
 - Superficie total: x

- 2- Utilizandola, escribimos el resto de cantidades que intervienen en el problema:
 - Superficie sembrada en el primer día: $\frac{20x}{100} = \frac{x}{5}$

 - Superficie sembrada en el segundo día: $\frac{1}{3}(x - \frac{x}{5}) = \frac{x}{3} - \frac{x}{15} = \frac{4x}{15}$

- 3- Relacionándolas según la información contenida en el enunciado obtenemos una ecuación:

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Superficie} \\ \text{total} \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} \text{Superficie} \\ \text{1º día} \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} \text{Superficie} \\ \text{2º día} \end{matrix}} = \boxed{12}$$

$$x - \frac{x}{5} - \frac{4x}{15} = 12$$

Resolución de la ecuación:

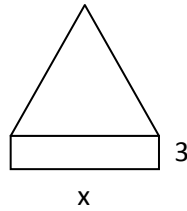
$$\begin{aligned} 15x - 15 \frac{x}{5} - 15 \frac{4x}{15} &= 15 \cdot 12 \\ 15x - 3x - 4x &= 180 \\ 8x &= 180 \\ x &= \frac{180}{8} = 22,5 \end{aligned}$$

La superficie total es de 22,5 hectáreas.

EJERCICIOS

- 1) En una clase Andrés, Bruno y Carmen se han presentado a las elecciones para delegados. Bruno ha obtenido la tercera parte de los votos de Andrés, más 3 votos. Carmen, la mitad de los votos de Bruno, mas 1 voto. Si en total se han emitido 28 votos, ¿Cuántos votos han conseguido cada uno?

- 2) Calcule el valor de x para que el rectángulo y el triángulo equilátero tengan el mismo perímetro. Calcule el área del rectángulo.



ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Con 22 metros de tela metálica se quiere armar un corral para conejos de forma rectangular y de 60 metros cuadrados de área, utilizando una pared ya construida. ¿Cuánto deben medir los lados?

Longitud de un lado: x

Longitud de otro lado: $22 - 2x$

Área del corral: $x(22 - 2x)$

Ecuación: $x(22 - 2x) = 60$

Se quitan paréntesis y se agrupan términos

$$-2x^2 + 22x - 60 = 0$$

Hemos llegado a una **ecuación de segundo grado**. Podemos simplificarla cambiando de signo y dividiendo por 2:

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

Soluciones de la ecuación:

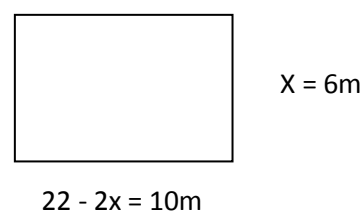
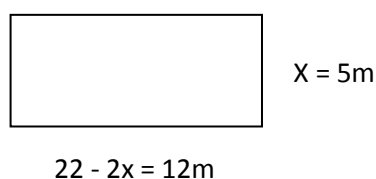
Esta ecuación tiene 2 soluciones distintas:

$$X_1 = 6, \text{ pues } 6^2 - 11 \cdot 6 + 30 = 0$$

$$X_2 = 5, \text{ pues } 5^2 - 11 \cdot 5 + 30 = 0$$

Soluciones del problema:

Cada una de las soluciones de la ecuación permite construir un corral distinto. En cada caso se utilizan 22 metros de tela metálica y el área es de 60 metros cuadrados.



Cualquier ecuación de segundo grado una vez simplificada y ordenada, queda en la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Indicación: Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna.

EJERCICIOS

1) Escribe en forma general las siguientes ecuaciones cuadráticas y comprueba las soluciones que se dan:

a) $3(x - 1)(x + 4) = 0$

Sol: -4 y 1

b) $x^2 = 3x$

Sol: 0 y 3

c) $(2x + 1)^2 = 4$

Sol: $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$

d) $x^3 + 6 = x(x^2 + x - 1)$

Sol: -2 y 3

ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS. SOLUCIONES

En $ax^2 + bx + c = 0$ ha de ser $a \neq 0$ para que sea de segundo grado. Pero puede ocurrir que falte alguno de los otros dos términos, en cuyo caso la ecuación se llama **incompleta** y es de fácil solución.

1. **Ecuaciones sin termino de primer grado:** $ax^2 + c = 0$

En este caso se despeja x^2 y se extrae la raíz cuadrada, si es posible.

EJEMPLO

1)

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Es sabido que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas opuestas. Así, la anterior ecuación tiene dos soluciones: $X_1 = 3$ y $X_2 = -3$.

2) En cambio la ecuación

$$2x^2 + 10 = 0$$

$$x^2 = -5$$

No tiene ninguna solución porque los números negativos carecen de raíz cuadrada, en el campo de los números reales.

2. Ecuaciones sin termino de primer grado: $ax^2 + bx = 0$

Se saca x factor común y queda un producto de dos factores igual a 0, lo que implica que alguno de los dos factores tiene que ser 0:

$$2x^2 + 7x = 0$$

$$x(2x + 7) = 0$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones.

En este caso son: $X_1 = 0$ y $X_2 = -3,5$

EJERCICIOS

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8} = 0$

b) $(2x + 3)^2 - 12x = 0$

c) $3x^2 = 5x + 9x^2$

d) $y^2 + 15 = 0$

e) $50 = 2x^2$

f) $-8x^2 + 135x = 0$

2) Si a un número se le resta su cuadrado se convierte en su mitad. ¿De qué número se trata?

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN COMPLETA $ax^2 + bx + c = 0$

Admitimos, sin demostración que las soluciones de esta ecuación se calculan aplicando la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo de la raíz las dos soluciones de la ecuación (cuando existen).

EJEMPLOS

1) Resolvamos la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$, donde $a = 2$, $b = -7$ y $c = 3$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{-7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

Luego esta ecuación tiene dos soluciones como se puede comprobar por sustitución directa:

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$

2) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

Simplificamos previamente dividiendo entre 2: $x^2 + 6x + 9 = 0$, con $a = 1$, $b = 6$ y $c = 9$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

Debido al radicando nulo se obtiene una sola solución: $X = -3$.

3) $-2x^2 + 3x - 5 = 0$

Multiplicamos por -1 para que el término cuadrático sea positivo:

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4}$$

Esta ecuación no tiene ninguna solución porque los números negativos no tienen raíz cuadrada en el campo de los números reales.

Número de soluciones. Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación, y de su signo depende el número de soluciones.

- $b^2 - 4ac > 0$ dos soluciones debido al doble signo de la raíz.
- $b^2 - 4ac = 0$ una solución, porque la raíz es 0.
- $b^2 - 4ac < 0$ ninguna solución porque un número negativo no tiene raíz cuadrada en el campo de los números reales.

Se denominan ecuaciones con raíces a aquellas ecuaciones en que la incógnita está bajo el signo de la raíz.

Por ejemplo

$$\sqrt{x} + 4x = 3$$

$$\sqrt[3]{x+2} + x = 3x - 1$$

Son ecuaciones con raíces, mientras que

$$x^2 + 4 = \sqrt[3]{8}$$

$$2x^3 - 6x^2 + \sqrt{3} = 0$$

No lo son.

Las ecuaciones con raíces cuadradas se resuelven elevando ambos miembros al cuadrado una o varias veces, según sea necesario.

Puesto que elevamos al cuadrado ambos miembros las soluciones de la ecuación resultante pueden **no ser** soluciones de la ecuación original. Entonces, **siempre** se debe controlar que las soluciones obtenidas sean soluciones de la ecuación original.

EJEMPLO

1) Resuelva $3 - x = \sqrt{2x - 6}$

Solución:

$$3 - x = \sqrt{2x - 6} \quad (\text{elevamos al cuadrado})$$

$$(3 - x)^2 = 2x - 6 \quad (\text{desarrollamos el cuadrado})$$

$$9 - 6x + x^2 = 2x - 6 \quad (\text{agrupamos a todos los terminos en el miembro izquierdo})$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad (\text{factorizamos})$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$X_1 = 3 \quad \text{y} \quad X_2 = 5$$

Control:

Para $x = 3$ calculamos el miembro derecho (m.d) y el miembro izquierdo (m.i) de la ecuación original.

$$m.i = 3 - 3 = 0$$

$$m.d = \sqrt{2 \cdot 3 - 6} = 0$$

Vemos que resulta $m.d = m.i$, entonces $x = 3$ es una solución.

Para $x = 5$ tenemos

$$m.i = 3 - 5 = -2$$

$$m.d = \sqrt{2 \cdot 5 - 6} = 2$$

Y vemos que aquí no se cumple la igualdad entonces $x = 5$ **no es solución**.

En resumen, $x = 3$ es la única solución de la ecuación, mientras que tanto $x = 3$ como $x = 5$ son soluciones de la ecuación original elevada al cuadrado.

EJERCICIOS

Resuelva las siguientes ecuaciones

1) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x-9}$

2) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

3) $2\sqrt{x} - \sqrt{5x+1} + \frac{1}{2} = 0$

4) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} - 2 = 0$

SISTEMAS DE ECUACIONES

¿QUÉ ES UN SISTEMA DE ECUACIONES?

1. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

$$3x + 2y = 8$$

La **solución** de esta ecuación es cualquier par de números que, sustituidos en lugar de x y de y dan lugar a una igualdad, es decir, verifican la ecuación.

El par de números $x = 4$, $y = -2$ es una solución porque:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 12 - 4 = 8$$

Los números $x = 2$, $y = 5$ no constituyen solución porque:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \neq 8$$

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, que se pueden obtener despejando una de las dos incógnitas y dando valores arbitrarios a la otra:

$$y = \frac{8 - 3x}{2}$$

| | | | | | | | |
|---|-----|----|-----|---|-----|---|-----|
| X | ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ... |
| Y | ... | 7 | 5,5 | 4 | 2,5 | 1 | ... |

Cada uno de estos pares es una solución de la ecuación.

2. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Una **solución** de este sistema será un par de números que verifique las dos ecuaciones.

Tanto la primera ecuación como la segunda tienen, por separado, infinitas soluciones:

$$y = \frac{14 - 3x}{2}$$

$$y = 8 - 2x$$

| | | | | | | | |
|---|-----|-----|---|-----|----------|-----|-----|
| X | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| Y | ... | 8,5 | 7 | 5,5 | 4 | 2,5 | ... |

| | | | | | | | |
|---|-----|----|---|---|----------|---|-----|
| X | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| Y | ... | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | ... |

El par de número $x = 2, y = 4$ es solución del sistema porque satisface a la vez ambas ecuaciones.

Cualquier sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, una vez simplificado, queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c} \end{cases}$$

EJERCICIOS

1) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

- Despeja x en las dos ecuaciones
- Halla pares de números que cumplan cada ecuación y realiza una tabla
- ¿Cuál es la solución del sistema?

2) Simplifica este sistema:

$$2(x - 3y) = 5 - 3(2y - 1)$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x + 2y}{4} + 1$$

3) Inventa un sistema que tenga la solución:

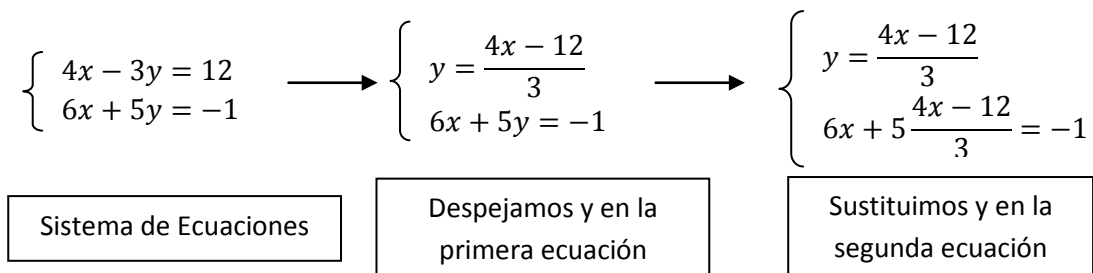
$$x = 6 \quad y = -7$$

4) Completa este sistema para que admita la solución $x = -4, y = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 8y = \dots \\ 15x + y = \dots \end{array} \right.$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra



Resolvemos la ecuación en x:

$$18x + 20x - 60 = -3$$

$$38x = 57$$

$$x = \frac{57}{38} = \frac{3}{2}$$

Hemos obtenido el valor de x; lo sustituimos ahora en la expresión de y:

$$y = \frac{4 \cdot \frac{3}{2} - 12}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Por lo tanto, el sistema tiene la única solución: $x = 3/2, y = -2$

Comprobación:

Sustituimos la solución hallada en las dos ecuaciones del sistema, y verificamos que ambas satisfacen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot (-2) = 6 + 6 = 12 \end{array} \right.$$

$$6 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot (-2) = 9 - 10 = -1$$

En este método podemos empezar despejando cualquier incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones. Conviene despejar la que conduzca a los cálculos más sencillos; por ejemplo, la que aparezca con coeficiente 1 si es que hay alguna.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Se despeja la misma letra en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones resultantes:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 12 & \rightarrow & \quad x = \frac{3y + 12}{4} \\ 6x + 5y &= -1 & \rightarrow & \quad x = \frac{-5y - 1}{6} \end{aligned}$$

Ahora igualamos

$$\frac{3y + 12}{4} = \frac{-5y - 1}{6}$$

Resolvemos la ecuación resultante, que tiene una sola incógnita:

$$\begin{aligned} 6(3y + 12) &= 4(-5y - 1) \\ 18y + 72 &= -20y - 4 \\ 38y &= -76 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \cdot (-2) + 12}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto la solución es: $x = 3/2$, $y = -2$.

EJERCICIOS

- 1) Resuelve por el método de sustitución estos sistemas y comprueba las soluciones.

{

a)
$$\begin{cases} -4x + 5y = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$$

2) Resuelve por igualación

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Todo par de números, (x,y) , puede considerarse como las coordenadas de un punto del plano. Las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas forman una recta. Por lo tanto, un sistema de dos ecuaciones da lugar a dos rectas.

EJEMPLO

Vamos a interpretar gráficamente el sistema:

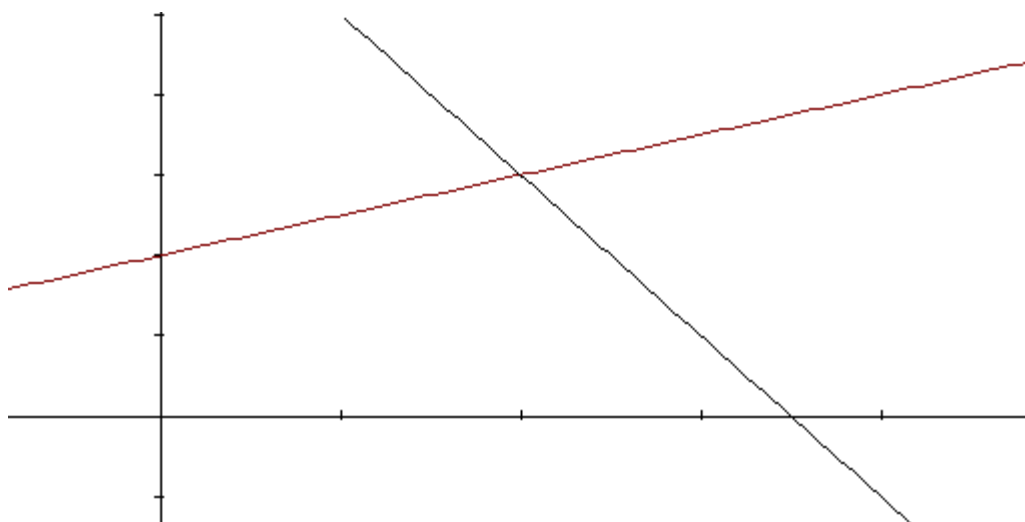
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Para ello despejamos en cada ecuación una incógnita y construimos una tabla con las soluciones, que luego representamos sobre unos ejes coordenados:

| 1º ecuación: $y = -2x + 7$ | | | | | | | | |
|----------------------------|-----|----|---|---|---|---|----|-----|
| x | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| y | ... | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | -1 | ... |

| 2º ecuación: $y = \frac{x+4}{2}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| x | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| y | ... | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | ... |

Solución del sistema



Cada ecuación se representa por una recta, y el punto de intersección de ambas es la solución del sistema de ecuaciones.

En este ejemplo hemos representado varias soluciones de cada ecuación, pero para dibujar una recta sanemos que son suficientes dos puntos, es decir, dos soluciones.

SISTEMAS INCOMPATIBLES E INDETERMINADOS

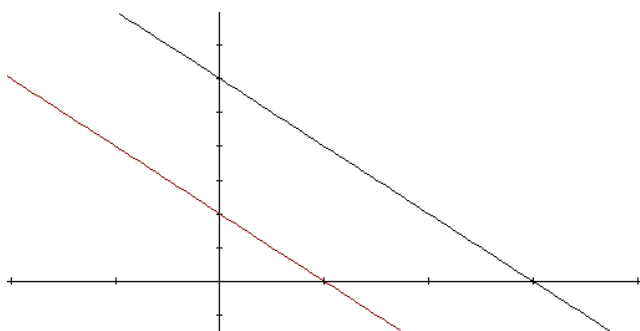
1. Sistemas incompatibles: No tienen **ninguna** solución

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

Este sistema no tiene ninguna solución, ya que las dos ecuaciones afirman cosas claramente **contradictorias**.

En la representación gráfica, las dos rectas son paralelas y no se cortan. No hay ninguna solución común a ambas ecuaciones.



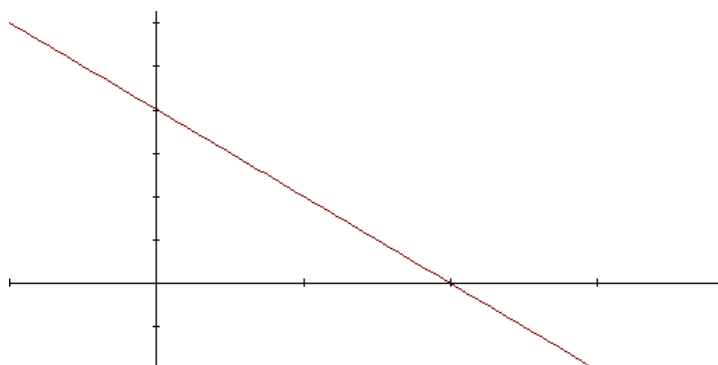
2. Sistemas indeterminados: Tienen **infinitas** soluciones

Consideremos este ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Observa que simplificando la segunda ecuación se obtiene nuevamente la primera ecuación.

No se trata entonces, de un verdadero sistema, sino de una única ecuación repetida, con infinitas soluciones representadas por los puntos de la recta. Estos sistemas se llaman **indeterminados**.



EJERCICIOS

1) Representa gráficamente cada uno de los dos sistemas:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a) Determina en cada caso el punto de intersección de las rectas.

b) Calcula las soluciones algebraicas y comprueba que coincide con el punto de intersección.

2) Añade otra ecuación de manera que el sistema resulte: a) Indeterminado
b) incompatible

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = 2 \\ \dots \end{array} \right.$$

3) Consideremos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = -6 \\ 2x + 2y = 8 \end{array} \right.$$

a) Halla dos soluciones de la primera ecuación y traza, sobre unos ejes coordenados, su recta representativa.

b) Repite el punto anterior, para la segunda ecuación.

c) ¿En qué punto se cortan las dos rectas?

d) Comprueba que coinciden la solución algebraica y la geométrica.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EJEMPLO 1

En una fiesta, una chica adquiere 2 panchos y 3 gaseosas y paga por todo \$5,90. Otra chica se lleva 4 panchos y 2 gaseosas por un total de \$8,20. ¿Cuánto vale cada artículo?

Planteo:

Precio de un pancho: x precio de una gaseosa: y

$$\left. \begin{array}{l} \text{Primera chica: } 2x + 3y = 5,90 \\ \text{Segunda chica: } 4x + 2y = 8,20 \end{array} \right\}$$

Solución: $x = \$1,60$ $y = \$0,90$

EJEMPLO 2

Un comerciante mezcla café de Colombia con café de Brasil para obtener una calidad intermedia.

Si los mezcla en la proporción de 2 a 3 (por cada 2 Kg de Colombia se añaden 3 Kg de Brasil), la mezcla resulta a 7,80 \$/Kg. Mientras que con la proporción 2 a 1, el precio de la mezcla es de 7,00 \$/Kg.

¿Cuál es el precio del kilogramo de cada clase de café?

Planteo:

Precio del café de Colombia: x Precio del café de Brasil: y

| | | | | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------|---|------------------------------|---|--------------------------|
| 2 Kg de café de Colombia, a x \$/kg | + | 3 Kg de café de Brasil, a y \$/kg | = | 5 Kg de mezcla, a 7,80 \$/kg | → | $2x + 3y = 5 \cdot 7,80$ |
| 2 Kg de café de Colombia, a x \$/kg | + | 1 Kg de café de Brasil, a y \$/kg | = | 3 Kg de mezcla, a 7,00 \$/kg | → | $2x + 1y = 3 \cdot 7$ |

Solución:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 39 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

$X = 6 \quad Y = 9$

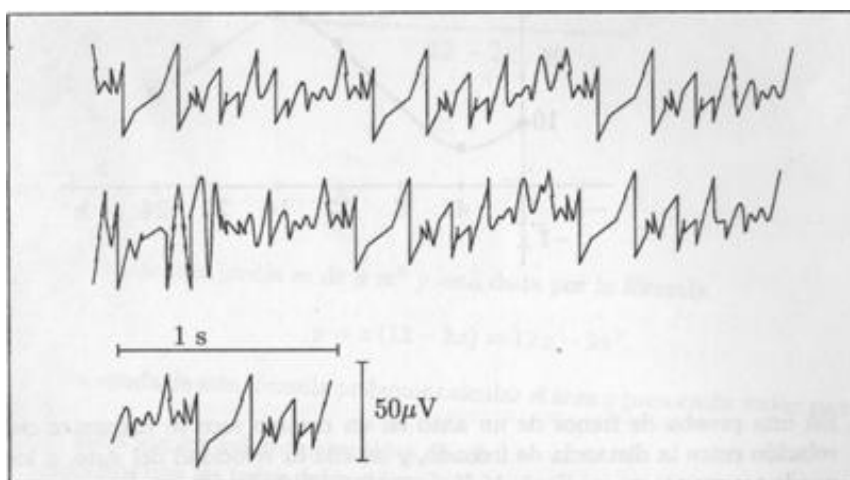
El precio de cada tipo de café es de 6 \$/kg y 9 \$/kg respectivamente.

FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Cuando las células de la corteza cerebral trabajan, generan un voltaje. Midiendo cómo cambia el voltaje V con el tiempo se puede descubrir el funcionamiento anormal del cerebro. A este método se lo llamó EEG (electro-encefalograma)

El cambio del voltaje medido **depende** del tiempo transcurrido.



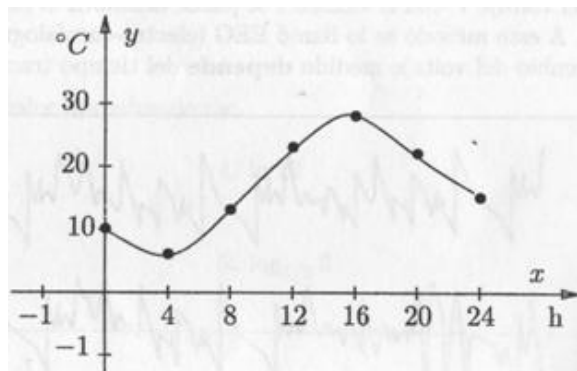
En general, la manera en que una cantidad cualquiera y (en el ejemplo arriba mencionado el voltaje V) depende de otra cantidad x (el tiempo t) puede ser presentada de formas muy diferentes, como se ejemplifica a continuación.

EJEMPLOS

- 1) La relación entre el peso, x medido en gramos, de una carta y el costo de su franqueo, y en pesos, se extrae de la siguiente tabla:

| Peso = x medido en gramos | Costo = y medido en \$ |
|-----------------------------|--------------------------|
| 100 | 0,60 |
| 250 | 0,85 |
| 500 | 1,25 |
| 1000 | 1,75 |

- 2) La relación entre el tiempo, x horas, y la temperatura del medio ambiente, y °C, durante un día se puede describir con la siguiente grafica:

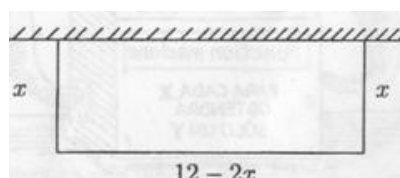


- 3) En una prueba de frenos de un auto en un camino seco se encuentra que la relación entre la distancia de frenado, y en metros, con la velocidad del auto, x km/h, puede representarse mediante la fórmula $y = 0,012 x^2$

En estos tres ejemplos vemos que a cada valor de x le corresponde exactamente un único valor de y (de acuerdo a una tabla, una gráfica o una fórmula) definiéndose de esta manera una dependencia específica de la **variable y** con la **variable x** . decimos entonces en cada caso que “ y es una función de x ” y que x es la variable **independiente** e y es la variable **dependiente**.

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Con una valla de 12 m se desea cercar tres de los lados de un jardín rectangular que se encuentra contra un muro, como se muestra en la figura.



El área de este jardín es de y m² y está dada por la fórmula

$$y = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2$$

Con ayuda de esta fórmula podemos calcular el área y para **cada valor permitido** de x .

¿Cuáles son los valores permitidos de x ?

Sabemos que los lados del rectángulo deben ser positivos, por lo tanto $0 < x < 6$ (observe la figura y entenderá por qué).

Tenemos entonces que

$$y = 12x - 2x^2, \quad 0 < x < 6$$

Por ejemplo, si el lado vertical del rectángulo es $x = 4\text{m}$, el área será:

$$y = (12 \times 4 - 2 \times 16) = 16 \text{ m}^2$$

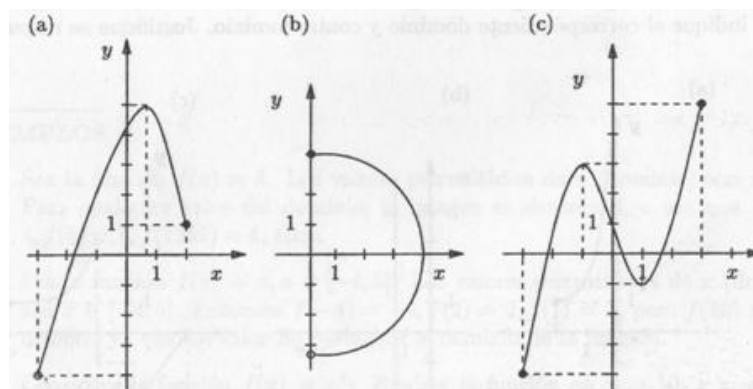
Por lo tanto:

Llamamos **función** a una regla que a cada valor **permitido** de x le adjudica exactamente un **único** valor y

- Se denomina **dominio** al conjunto de valores **permitidos** de x .
- Se denomina **contradominio, codominio o imagen** al conjunto de valores **y obtenidos**.

EJEMPLO

Decida si las siguientes graficas representan funciones. En caso de hacerlo, indique el dominio e imagen.



Solución

- a) La gráfica sí representa a una función ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

Dominio = $(-3, 2]$ Imagen = $(-4, 5]$

- b) No representa una función ya que a cada valor de $x \in (0, 4)$ le corresponden dos valores de y .
- c) Sí representa a una función.

Dominio = $[-3, 3]$ Imagen = $[-4, 5]$

EJERCICIOS

- 1) Decida si las siguientes tablas representan una función de las variables indicadas en cada caso. Justifique su respuesta.

a)

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| X | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| y | 11 | 14 | 23 | 20 | 11 |

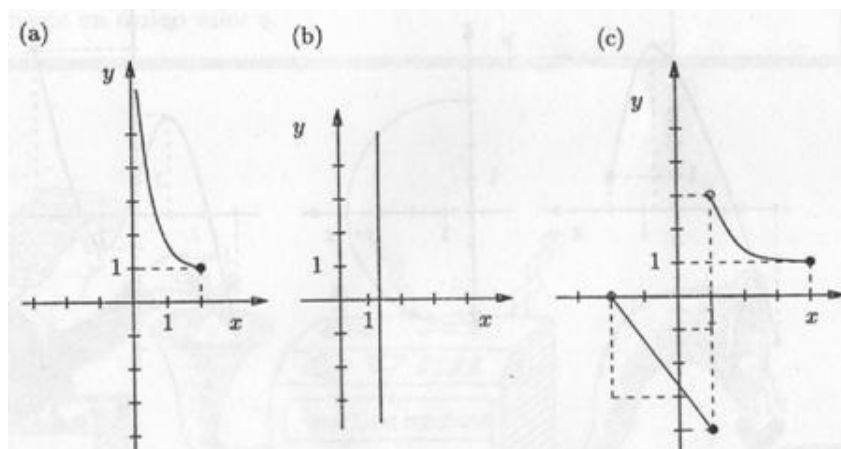
¿Es y una función de x ? ¿Es x una función de y ?

b)

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| Z | 5 | 10 | 15 | 20 | 5 |
| U | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 |

¿Es u una función de z ? ¿Es z una función de u ?

- 2) Diga si las siguientes gráficas representan una función o no, en caso de hacerlo indique el correspondiente dominio e imagen. Justifique su respuesta.



LA NOTACIÓN $f(x)$

En muchas situaciones encontramos que las reglas que determinan funciones están dadas por una fórmula (una expresión algebraica).

Por ejemplo, el perímetro de una circunferencia o el área de un círculo están dados, respectivamente, por las fórmulas: $y = 2\pi x$ e $y = \pi x^2$, donde x representa al radio de la circunferencia o del círculo.

Muchas veces resulta apropiado designar a la función con una letra que tenga relación con la magnitud que se desea calcular. En los ejemplos mencionados anteriormente, suele usarse la letra P para designar al perímetro y la letra A para el área. Entonces expresamos la dependencia del perímetro y del área con el valor del radio x , como:

$$P(x) = 2\pi x$$

$$A(x) = \pi x^2$$

En una situación general, la letra más usual para denotar una función cualquiera es, naturalmente, f . Denotaremos entonces los **valores** de la función como $f(x)$.

$f(x)$ se lee “**f de x**”.

EJEMPLOS

- 1) Sea la función $f(x) = 4$. Los valores **permitidos** de x (dominio) son $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier valor del dominio, la imagen es siempre 4, o sea que $f(2) = 4$, $f(5) = 4$, $f(1259) = 4$, etc...
- 2) Sea la función $f(x) = x$, donde $x \in [-4, 5]$. Los valores **permitidos** de x (dominio) son $x \in [-4, 5]$. Entonces $f(-4) = -4$, $f(2) = 2$, $f(1) = 1$, pero $f(10)$ no está definido ya que ese valor no pertenece al dominio de la función.
- 3) Considere la función $f(x) = x^2$. **Evalúe** la función en $x = 10$, $x = a + b$, $x = 1 - \sqrt{3}$.

Solución

- Sí evaluamos la función en 10, tenemos:

$$f(10) = 10^2 = 100$$

- Sí evaluamos la función en $a + b$, tenemos:

$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

- Y si evaluamos en $1 - \sqrt{3}$:

$$f(1 - \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$$

4) Considere la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y determine $f(2)$, $f(a)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$ y $\frac{1}{f(a)}$

Solución

$$f(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$
$$f(a) = \frac{1}{a+1}$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{a}+1} = \frac{1}{\frac{1+a}{a}} = \frac{a}{a+1}$$
$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\frac{1}{a+1}} = a+1$$

EJERCICIOS

1) Para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{2}$, calcule $f(3)$, $f(-5)$, $f(2+a)$, $f(3b)$

b) $f(x) = 3x + 1$, calcule $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, calcule $f(-1)$, $f(5)$, $f(t)$, $f(4-j)$

d) $f(x) = -x$, calcule $f(-1)$, $f(a-b)$, $f(3z)$, $f(3t-1)$

2) Dada la función $f(x) = x - \frac{1}{x}$, calcule y simplifique:

a) $f(ab)$, $f(a)f(b)$, $f\left(\frac{a}{b}\right)$ y $\frac{f(a)}{f(b)}$

b) $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$ y $f(a) + \frac{1}{f(a)}$

3) Sea $f(x) = 3x^2 - 8$, calcule:

a) $f(x+h)$

b) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4) El volumen V [m³] de aceite en una cisterna que tiene una pérdida en el tiempo t [horas] está determinado por la expresión

$$V(t) = 3000 - 2t - t^2$$

- Calcule la cantidad de aceite que salió entre $t_1 = 2$ horas y $t_2 = 7$ horas.
- ¿Cuál fue la pérdida promedio por hora?

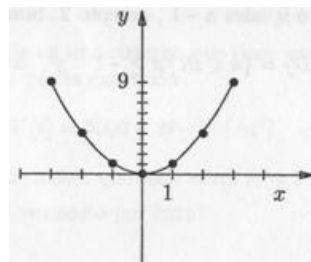
GRÁFICA DE FUNCIONES

Podemos visualizar gráficamente la relación entre las variables dependiente e independiente de una función dada si utilizamos cada valor de x y su correspondiente valor de y como la abscisa y la ordenada de un punto, respectivamente.

En otras palabras, para graficar una función calcularemos y luego ubicaremos en el plano los pares ordenados $(x, f(x))$ para distintos valores permitidos de x .

EJEMPLO

Consideremos la función $f(x) = x^2$, calculemos los pares $(-3, f(-3)), (-2, f(-2)), (-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))$ y ubiquémoslos en el plano:



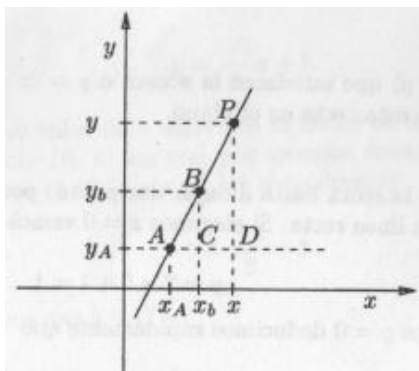
Si pudiéramos hacer este procedimiento para **todos** los valores del dominio obtendríamos una curva a la que le llamaremos **gráfica de f** .

Definición: El conjunto de puntos (x, y) del plano tal que $y = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio de f se denomina gráfica de f .

LA RECTA CÓMO GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Ecuación de la recta:

Sabemos que por dos puntos en el plano pasa una única recta o, dicho de otro modo, que dos puntos determinan una única recta. Para poder encontrar una ecuación para la recta debemos describir a la misma a partir de la propiedad geométrica que satisfacen sus puntos.



Una recta no vertical (no paralela al eje y) tiene la propiedad de que sea cual fuere el par de puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ que se elija, el cociente

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

no cambia, o sea es constante. Esto puede demostrarse fácilmente usando el criterio de semejanza pero no lo haremos en este curso.

Llamamos a la constante m la **pendiente** de la recta.

Consideremos la función lineal (x aparece elevado a la potencia 1)

$$f(x) = mx + b$$

Su gráfica está determinada por todos los puntos (x, y) tal que $y = f(x)$, o sea tal que

$$y = mx + b$$

Por lo tanto toda función de la forma representada por la primera expresión determina la gráfica de una recta no vertical y toda recta no vertical es la gráfica de una función de este tipo.

La pendiente m es la medida de la inclinación de una recta, por lo tanto **dos rectas paralelas tienen la misma pendiente**. Nótese que una recta horizontal ($y = b$) tiene pendiente cero y una recta que “sube” hacia la derecha tienen pendiente positiva mientras que una recta que “cae” hacia la derecha tiene pendiente negativa. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido puesto que implicaría la división por cero. Por lo tanto, la pendiente de una recta vertical queda sin definir, en este caso la ecuación de la recta será $x = a$.

Observe que la ecuación de la recta horizontal dada por $y = 3$ corresponde a la función $f(x) = 3$ pero que la ecuación de la recta vertical dada por $x = 3$ no corresponde a ninguna función.

EJEMPLOS

- 1) Los pares (x, y) que satisfacen la ecuación $y = 2x + 1$ se encuentran sobre una recta. Dibuje esta recta en el plano.

Solución:

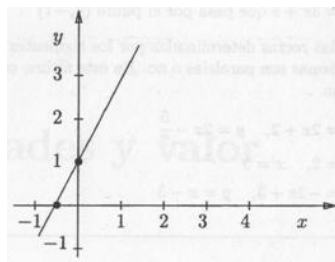
Para dibujar la recta basta dibujar dos puntos por los que ésta pasa y unirlos mediante una línea recta. Si elegimos $x = 0$ vemos directamente de la ecuación que

$$y = 2 \times 0 + 1 = 1$$

y si colocamos $y = 0$ deducimos rápidamente que

$$0 = 2x + 1, \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

La recta determinada por los puntos $(0, 1)$ y $(-1/2, 0)$ se muestran en la siguiente figura:



- 2) Los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (4, 1)$ determinan una recta, encuentre su ecuación.

Solución:

Por lo dicho anteriormente sabemos que la ecuación de la recta es

$$y = mx + b$$

Para encontrar la ecuación de la recta que pasa por A y B determinaremos primero su pendiente:

$$m = \frac{1 - 2}{4 - 1} = \frac{-1}{3}$$

Entonces tenemos que

$$y = \frac{-1}{3}x + b$$

Para determinar el valor de b usaremos el hecho de que la recta pasa por el punto A (o el punto B). O sea que, por ejemplo, reemplazando en la ecuación anterior a (x, y) por $(1, 2)$ obtendremos

$$2 = \frac{-1}{3} + b$$

De aquí obtenemos que $b = 7/3$

EJERCICIOS

- 1) Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos
 - a) (2, 1) y (1, 2)
 - b) (-1, 1) y (0, 2)

- 2) Encuentre la ecuación de la recta
 - a) $y = mx + 1$ que pasa por el punto (1, 0)
 - b) $y = 3x + b$ que pasa por el punto (1, 4)

- 3) Dibuje las rectas determinadas por los siguientes pares de ecuaciones y decida si las mismas son paralelas o no. En este último caso encuentre el punto en que se cortan
 - a) $y = 2x + 2$, $y = 2x - 5/2$
 - b) $y = 2$, $x = 5$
 - c) $y = -2x + 3$, $y = x - 3$

- 4) Dibuje en un mismo gráfico las siguientes funciones:
 - a) $h(x) = x - 3$ y $g(x) = 2x$
 - b) $l(x) = 3x$ y $f(x) = 5$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

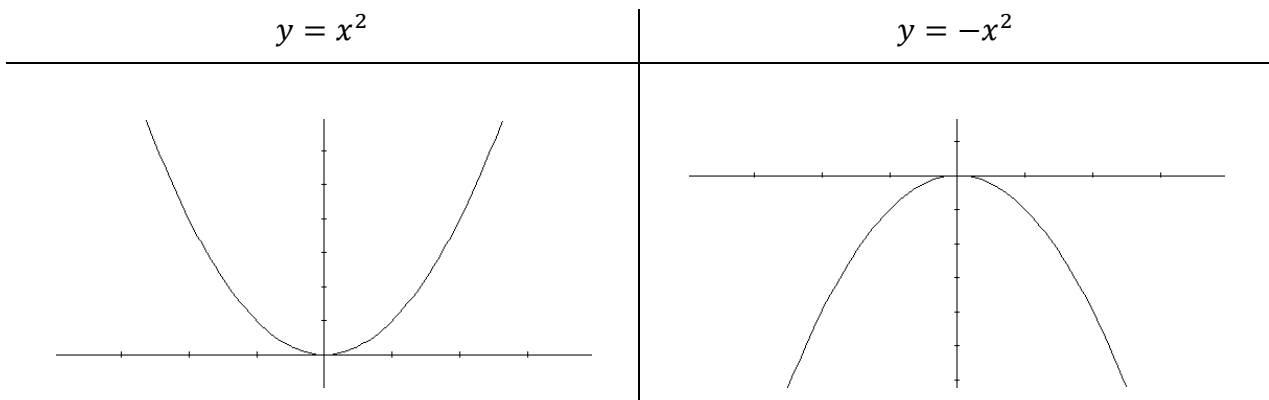
Una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales cualesquiera y “a” es distinto de cero. El número a se denomina **coeficiente de 2º grado**, el número b se denomina **coeficiente lineal** y el número c se denomina **coeficiente o término independiente** o también ordenada al origen.

Si representamos todos los puntos de una función cuadrática sobre el eje de coordenadas obtenemos siempre una curva llamada **parábola**.

Como ejemplo, estas son dos gráficas de parábolas sencillas:



Obtención del vértice de una parábola:

El vértice de una parábola está situado en el eje de ésta y, por lo tanto, su abscisa será el punto medio de las abscisas de dos puntos de la parábola que sean simétricos.

Como toda función cuadrática pasa por el punto (0, c) y el simétrico de éste tiene de abscisa $x = -b/a$, la del vértice será $x_v = \frac{-b}{2a}$. La ordenada **Yv** se calcula sustituyendo el valor de **Xv** en la ecuación de la función.

Intersección de la parábola con los ejes:

- **Intersección con el eje Y:** Como todos los puntos de este eje tienen la abscisa $x = 0$, el punto de corte de la parábola con el eje Y tendrá de coordenadas **(0, c)**. Esto quiere decir que el corte de la gráfica con el eje Y es directamente el punto con valor igual al coeficiente c.
- **Intersección con el eje X:** Como todos los puntos del eje X tienen la ordenada $y = 0$, para ver estos puntos de corte se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Recordemos que esta ecuación se resuelve con la fórmula ya conocida:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependiendo del valor del discriminante $D (b^2 - 4ac)$, se pueden presentar tres situaciones distintas:

- 1) $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas y la parábola corta al eje X en dos puntos.
- 2) $D = 0$, la ecuación tiene una solución real y, por lo tanto, la parábola corta al eje X en un solo punto.
- 3) $D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y la parábola no cortará al eje X.

Cálculo de puntos de la parábola:

Se puede hallar los puntos de la parábola que sean necesarios simplemente sustituyendo en la ecuación de la función cuadrática, la variable x por aquellos valores que queramos.

EJEMPLO

Grafique la siguiente función cuadrática:

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es identificar los coeficientes de la función

$$a = -1$$

$$b = -2$$

$$c = 3$$

Ahora que tenemos el valor de los coeficientes se puede obtener el valor de las raíces de la función (corte de la parábola con el eje X):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

A continuación se encuentra el valor de X_v :

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Reemplazando en la función original la variable X por el valor de X_v obtenemos el valor de Y_v :

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y_v = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

El valor donde la gráfica corta al eje Y es el mismo que el coeficiente c por lo tanto:

$$y_0 = 3$$

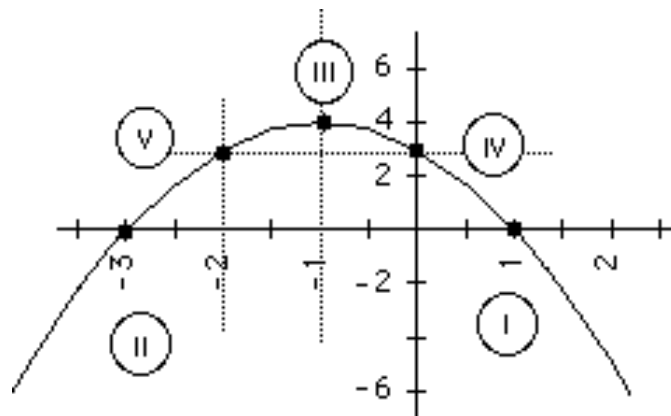
Por último, como la función es simétrica sabemos que a la misma distancia del eje de simetría se halla el otro valor de x con $y = 3$ (se puede determinar el valor de x mediante una expresión matemática muy sencilla), con lo cual determinamos:

$$x = -2 \quad y = 3$$

En resumen encontramos los siguientes puntos notables que nos permiten graficar:

- Raíz (1, 0) **(I)**
- Raíz (-3, 0) **(II)**
- Vértice (-1, 4) **(III)**
- Ordenada al origen (0, 3) **(IV)**
- Simétrico del término independiente (-2, 3) **(V)**

Ahora se puede graficar con todos estos datos:



EJERCICIOS

1) Representa las funciones cuadráticas:

a) $y = -x^2 + 4x - 3$

b) $y = x^2 + 2x + 1$

c) $y = x^2 + x + 1$

2) Halla el vértice de las siguientes parábolas:

a) $y = (x - 1)^2 + 1$

b) $y = 3(x - 1)^2 + 1$

c) $y = 2(x + 1)^2 - 3$

d) $y = 3x^2 + 12x - 5$

3) Indica sin dibujar, en cuantos puntos cortan al eje X las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 5x + 3$

b) $y = 2x^2 - 5x + 4$

c) $y = x^2 - 2x + 4$

d) $y = -x^2 - x + 3$

4) Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcula el valor de a.

5) Una parábola tiene su vértice en el punto (1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

6) Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = (x - 4)^2$

d) $y = (x + 3)^2$

e) $y = (x - 1)^2 + 3$

f) $y = (x + 2)^2 - 2$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

CUADRADO Y CUBO DE UN BINOMIO

Una expresión con dos sumandos, $a + b$, se denomina **binomio**.

- El **cuadrado de un binomio** es

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ya que

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- El **cubo de un binomio** es

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Puesto que

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a(a + b)^2 + b(a + b)^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA

El **producto de la suma por la diferencia de dos números** se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados, o sea

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ya que

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

EJERCICIOS

Simplifique las siguientes expresiones

- 1) $(p - 1)^2 + (p + 1)^2 - 2p^2$
- 2) $(p + q)(p - q) - (p - q)^2$
- 3) $(r + s)^2 - (r - s)^2$
- 4) $3(t - 3)^2 - 2(t - 1)^2 + 2(t + 1)^2 - 3(t + 3)^2$
- 5) $(t - 3)^3 - (t + 3)^3$

CASOS DE FACTOREO

FACTOR COMÚN

Procedimiento:

1° Paso: Buscamos el **factor común** (que debe ser el mayor posible)

2° Paso: Se expresa el **polinomio dado** como el producto del **factor común** por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común.

EJEMPLO

$$25a^3 + 10a^2 - 15a^4 = 5a^2(5a + 2 - 3a^2)$$

FACTOR COMUN POR GRUPOS

Se aplica en polinomios que no tienen factor común en todos sus términos.

Procedimiento

1° Paso: Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se sustrae dicho factor común en cada uno de los grupos.

2° Paso: Debe quedar un paréntesis común.

3° Paso: Se extrae dicho paréntesis como factor común.

EJEMPLO

$$3a^2 - 3b^2 + c a^2 - c b^2 = (3a^2 - 3b^2) + (c a^2 - c b^2) = 3(a^2 - b^2) + c (a^2 - b^2) = (3 + c) (a^2 - b^2)$$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Recuerdo: “Cuadrado de un Binomio”

Procedimiento:

1° Paso: Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante.

Y calculo sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Luego calculo el doble producto de sus bases; y luego nos fijamos si se verifica que el doble producto figura en el trinomio dado,

3° Paso: Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; y luego lo factorizo como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

OBSERVACIONES MUY IMPORTANTES:

- Si el doble producto que figura en el “*Trinomio dado*” es positivo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán las dos el mismo signo.
- Si el doble producto que figura en el “*Trinomio dado*” es negativo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán signos opuestos.

EJEMPLO

$$a^2 + 6a + 9 = a^2 + 2 \cdot 3a + 3^2 = (a + 3)^2$$

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Recuerdo: “Cubo de un Binomio”

Procedimiento:

1° Paso: Se reconocen los cubos perfectos

Y calculo sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso:

Luego calculo:

- El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda
- El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda

Luego nos fijamos si estos cálculos figuran en el cuatrinomio dado,

3° Paso: Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego lo factorizo como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.

OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE:

Las bases que figuran en el Cubo del Binomio, van a conservar su signo.

EJEMPLO

$$8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 = (2a + b)^3$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Recuerdo: Producto de Binomios Conjugados

Procedimiento:

1° Paso: Debo identificar la resta (debe haber un solo signo negativo) y luego los cuadrados perfectos.

2° Paso: Calculo las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

3° Paso: Transformo la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formado por dichas bases.

EJEMPLO

$$36a^2 - 25b^2 = (6a + 5b) \cdot (6a - 5b)$$

REGLA DE RUFFINI

En algunos casos es conveniente factorizar los polinomios mediante divisiones sintéticas (regla de Ruffini). Esta regla se aplica en polinomios cuyos factores son de la forma $(x \pm a)$

Esta regla nos dice que “un polinomio tiene por factor $(x \pm a)$ si al reemplazar el valor x por “ a ” en el polinomio, el resultado es cero. El valor de “ a ” de los posibles factores de la expresión, es un divisor del término independiente del polinomio”.

Resolver por la regla de Ruffini la división:

$$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$$

- 1) Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.
- 2) Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea
- 3) Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.
- 4) Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

- 5) Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente termino

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

6) Sumamos los dos coeficientes

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad \quad \quad 3 \\ \hline 1 \quad 3 \end{array}$$

7) Repetimos el proceso anterior

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad \quad \quad 3 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \end{array}$$

Volvemos a repetir el proceso

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad \quad \quad 3 \quad 9 \quad 18 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \quad 18 \end{array}$$

Volvemos a repetir

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2 \\ 3 \quad \quad \quad 3 \quad 9 \quad 18 \quad 54 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 6 \quad 18 \quad 56 \end{array}$$

8) El ultimo numero obtenido, 56, es el resto

9) El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$$

EJERCICIOS

Factoriza aplicando la regla de Ruffini

1) $a^3+6a^2+12a+8$

2) a^4-13a^2+36

3) a^4-5a^2+4

4) $m^3+m^2-13m-28$

5) $x^3 - 3x - 2$

6) $m^3 - 4m^2 + m + 6$

7) $y^3 + 12y + 6y^2 + 8$

8) $x^3 + 2x^2 - 6 - 5x$

RACIONALIZACION DE DENOMINADORES

Cuando tenemos fracciones con radicales en el denominador conviene obtener fracciones equivalentes pero **que no tengan radicales en el denominador**. A este proceso es a lo que se llama racionalización de radicales de los denominadores.

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente.

Se pueden dar varios casos:

- 1. Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.**

Por ejemplo, si queremos racionalizar el denominador de la fracción $\frac{5}{\sqrt{2}}$, multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{2}$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Otro ejemplo. Racionalizar $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

Si antes de racionalizar extraemos los factores que se puedan en el radical del denominador, tenemos:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

Ahora basta multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar la raíz del denominador:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

También se puede directamente multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{18}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{54}}{18} = \frac{\sqrt{54}}{9}$$

Y ahora extraemos factores de la raíz del numerador y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{54}}{9} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^3}}{9} = \frac{3\sqrt{2 \cdot 3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ como vemos da el mismo resultado.}$$

- 2. Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. O sea si es una suma se multiplica por la resta, y viceversa.**

Por ejemplo $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

En el denominador siempre va a aparecer un producto de una suma por una diferencia, o sea una expresión del tipo $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

Otro ejemplo: $\frac{2}{3+\sqrt{7}}$, ahora multiplicamos numerador y denominador por $3 - \sqrt{7}$

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{2} = 3-\sqrt{7}$$

- 3. Si el denominador sólo tiene un término con una raíz de índice cualquiera, n , se multiplica numerador y denominador por otra raíz de índice n que complete una potencia de exponente n .**

Por ejemplo: $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

Factorizamos el radicando del denominador: $\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$, y como $\sqrt[3]{5^3} = 5$, vamos a multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[3]{5}$ para completar la potencia de 5

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

Otro ejemplo: $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$

Para que se elimine la raíz cuarta, la potencia tiene que estar elevada a 4, luego basta multiplicar por $\sqrt[4]{2^3}$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{2\sqrt[4]{2^3}}{2} = \sqrt[4]{2^3}$$

Otro ejemplo más

Racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

$$\frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2} =$$

$$\frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(x+1) - (x-1)} = \frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{x+1 - x+1} = \frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{2}$$

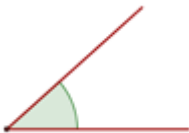





Por tanto podemos escribir que

$$\frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{2}$$

TRIGONOMETRIA

ÁNGULOS

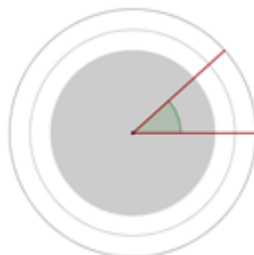
- Clasificación de los ángulos

| | | |
|---|---|---|
| Agudo $< 90^\circ$ | Recto $= 90^\circ$ | Obtuso $> 90^\circ$ |
|  |  |  |
| Convexo $< 180^\circ$ | Llano $= 180^\circ$ | Cóncavo $> 270^\circ$ |
|  |  |  |
| Nulo $= 0^\circ$ | Completo $= 360^\circ$ | |



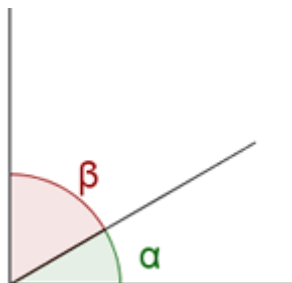
Negativo $< 0^\circ$

Mayor de 360°



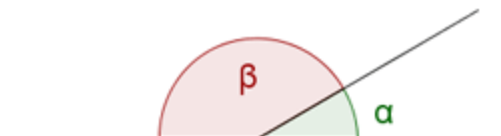
- **Ángulos Complementarios**

Si dos ángulos son tales que su suma es un ángulo recto se dice que son **complementarios**. Por ejemplo, si $\alpha = 32^\circ$ y $\beta = 58^\circ$, entonces α y β son complementarios.



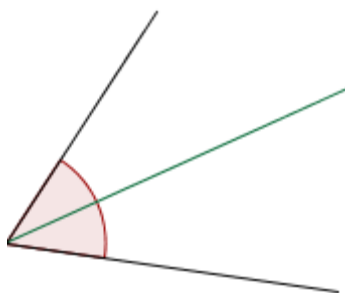
- **Ángulos suplementarios**

Si dos ángulos son tales que su suma es un ángulo llano se dice que son **suplementarios**. Por ejemplo, si $\alpha = 32^\circ$ y $\beta = 148^\circ$, entonces α y β son suplementarios.



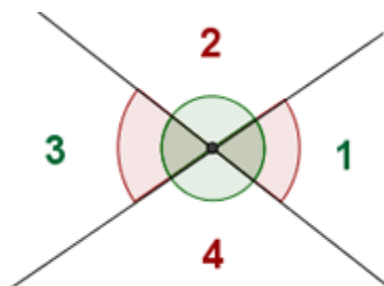
- **Bisectriz**

Se denomina **bisectriz** a la semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos iguales.



- **Ángulos opuestos por el vértice**

Los ángulos 1 y 3 de la figura son **opuestos por el vértice** al igual que los ángulos 2 y 4.

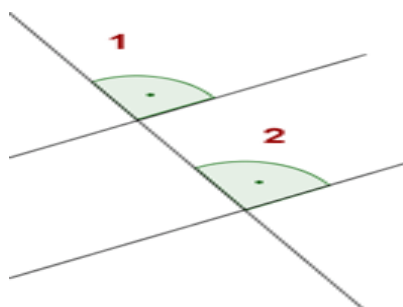


Teorema: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

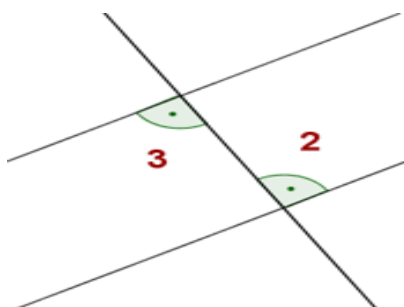
- **Ángulos correspondientes y alternos**

Considere dos rectas intersectadas por una tercera, llamada **transversal**, como se muestra en las figuras. Los pares de ángulos marcados en la misma se denominan **correspondientes**, **alternos internos** y **alternos externos**, respectivamente.

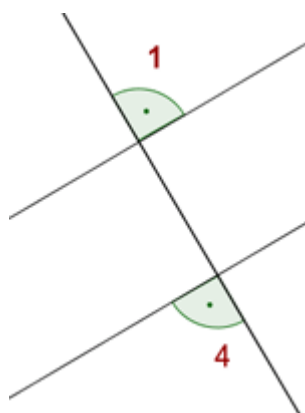
Ángulos correspondientes



Ángulos alternos internos



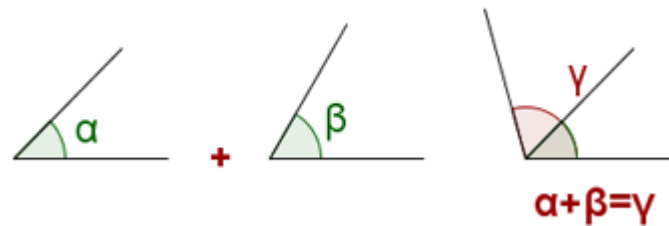
Ángulos alternos externos



Teorema:

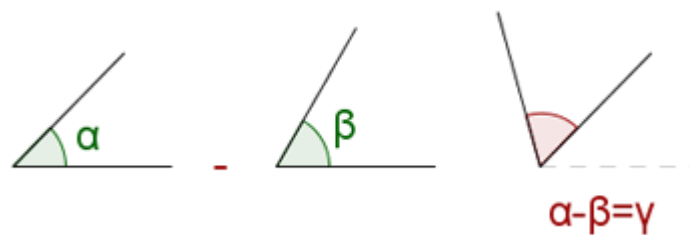
- Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.
- Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.
- Los ángulos alternos externos entre paralelas son iguales.

La suma de los ángulos es otro ángulo cuya **amplitud es la suma de las amplitudes de los dos ángulos iniciales.**



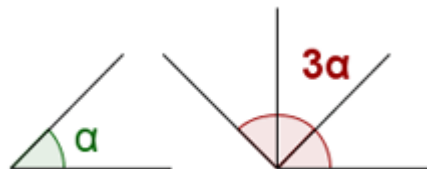
- **Diferencia de ángulos**

La diferencia de los ángulos es otro ángulo cuya amplitud es la **diferencia entre la amplitud del ángulo mayor y la del ángulo menor.**



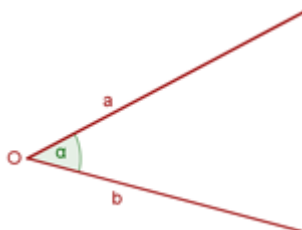
- **Producto de un número por un ángulo**

El producto de un número por un ángulo es otro cuya amplitud es la suma de tantos ángulos iguales al dado como indique el número.



SISTEMA DE MEDICIÓN

Un ángulo en la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama lados y al origen común vértice



El ángulo es **positivo** si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y **negativo** en caso contrario.

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1- Grado sexagesimal (°)

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

Un grado tiene 60 minutos (') y un minuto tiene 60 segundos (")

2- Radian (rad)

Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\text{rad} = 57,3^\circ$$

TRIÁNGULOS




Es un polígono de tres lados

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

- 1) Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia
- 2) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.
- 3) El valor de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.




CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

- Según sus lados

| Triángulo Equilátero | Triángulo isósceles | Triángulo Escaleno |
|---|---|--|
|  |  |  |

| | | |
|--------------------|-------------------|-----------------------|
| Tres lados iguales | Dos lados iguales | Tres lados desiguales |
|--------------------|-------------------|-----------------------|

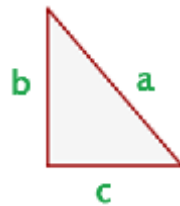
- Según sus ángulos

| Triángulo acutángulo | Triángulo rectángulo | Triángulo obtusángulo |
|--|---|--|
|  <p>Tres ángulos agudos</p> |  <p>Un ángulo recto</p> <p>El lado mayor es la hipotenusa Los lados menores son los catetos</p> |  <p>Un ángulo obtuso</p> |

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



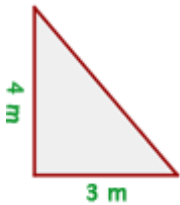
APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

- Conociendo los dos catetos calcular la hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

EJEMPLO

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3m y 4m respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?



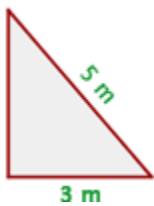
$$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$$

- Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro cateto

$$a^2 = b^2 + c^2 \begin{cases} \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

EJEMPLO

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5m y uno de sus catetos 3m. ¿Cuánto mide el otro cateto?



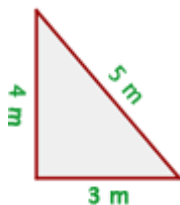
$$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4m$$

- Conociendo sus lados, averiguar si es rectángulo

Para que sea rectángulo el cuadrado del lado mayor ha de ser igual a la suma de los cuadrados de los dos menores

EJEMPLO

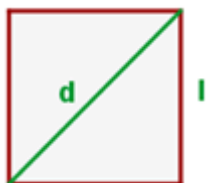
Determinar si el triángulo es rectángulo



$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

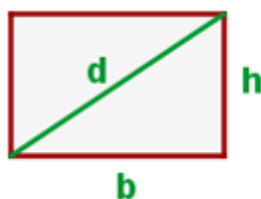
$$25 = 25$$

- Diagonal del cuadrado



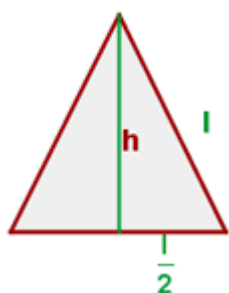
$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

- Diagonal del rectángulo



$$d^2 = b^2 + h^2 \Rightarrow d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

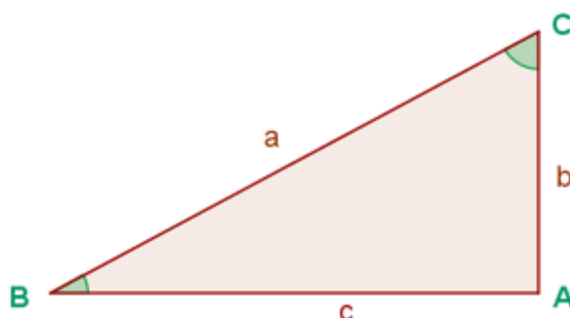
- Altura del triángulo equilátero



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Seno

Seno del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por $\text{sen } B$.

$$\sin B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Coseno

Coseno del ángulo B: es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Se denota por $\text{cos } B$.

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente

Tangente del ángulo B: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al ángulo.

Se denota por $\tan B$.

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

Cosecante del ángulo B: es la razón inversa del seno de B.

Se denota por $\operatorname{cosec} B$.

$$\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Secante

Secante del ángulo B: es la razón inversa del coseno de B.

Se denota por $\sec B$.

$$\sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

Cotangente del ángulo B: es la razón inversa de la tangente de B.

Se denota por $\operatorname{cotg} B$.

$$\operatorname{cotg} B = \frac{1}{\tan B} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Se llama circunferencia trigonométrica a aquella que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la circunferencia trigonométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes.

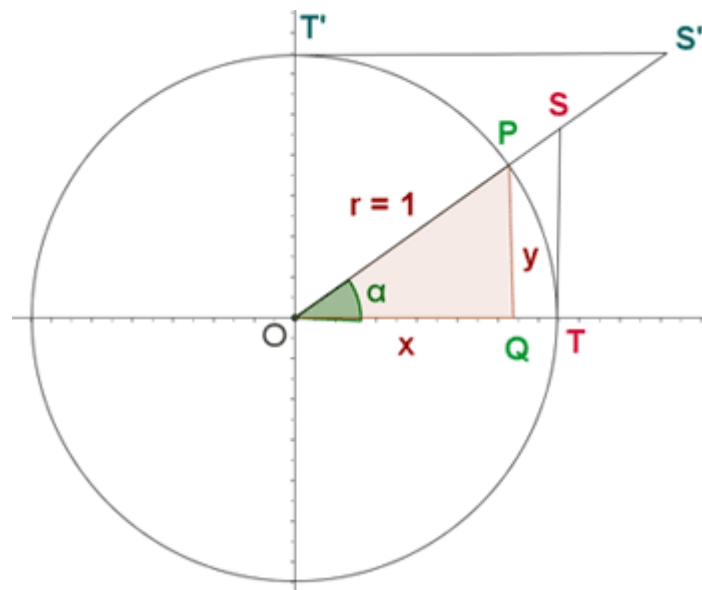
QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

El seno es la ordenada

El coseno es la abscisa

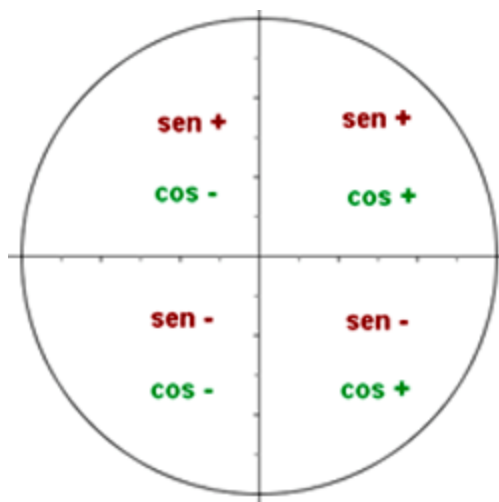
$$-1 \leq \sin a \leq 1$$

$$-1 \leq \cos a \leq 1$$



| | |
|--|--|
| $\sin a = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ$ | $\operatorname{cosec} a = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$ |
| $\cos a = \frac{OQ}{OP} = OQ$ | $\sec a = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$ |
| $\tan a = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$ | $\operatorname{cotg} a = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OT'}{ST'} = \frac{OT'}{r} = ST$ |

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



| Angulo α : | 0° | 90° | 180° | 270° |
|-------------------|-----------|----------------------|-------------|-----------------------|
| sen | 0 | 1 | 0 | -1 |
| Cos | 1 | 0 | -1 | 0 |
| tag | 0 | $\rightarrow \infty$ | 0 | $\rightarrow -\infty$ |

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

| Angulo α : | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° |
|-------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------|-----------------------|
| sen | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 |
| Cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 |
| tag | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\rightarrow \infty$ | 0 | $\rightarrow -\infty$ |

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$(\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$$

$$(\sec a)^2 = 1 + (\tan a)^2$$

$$(\operatorname{cosec} a)^2 = 1 + (\cotg a)^2$$

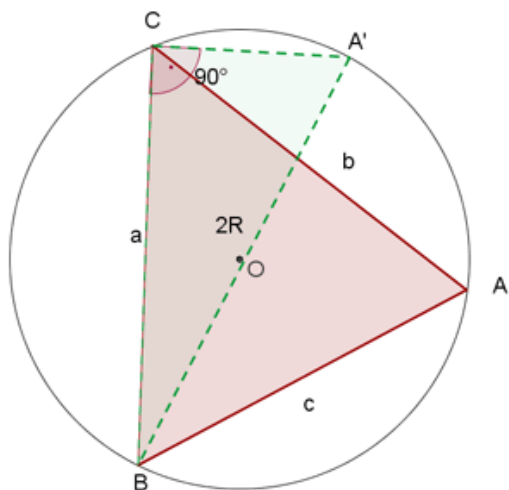
EJEMPLO

Sabiendo que $\sin a = 3/5$, y que $90^\circ < a < 180^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo a .

| | |
|--|--|
| $\sin a = \frac{3}{5}$ | $\operatorname{cosec} a = \frac{5}{3}$ |
| $\cos a = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ | $\sec a = -\frac{5}{4}$ |
| $\tan a = -\frac{3/5}{4/5} = -\frac{3}{4}$ | $\operatorname{cotg} a = -\frac{4}{3}$ |

TEOREMA DEL SENO

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

TEOREMA DEL COSENO

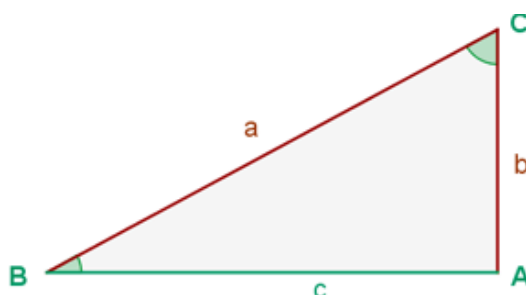
En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar sus lados, ángulos y área. Es necesario conocer dos lados del triángulo, o bien un lado y un ángulo distinto del recto.

- Se conocen la hipotenusa y un cateto.

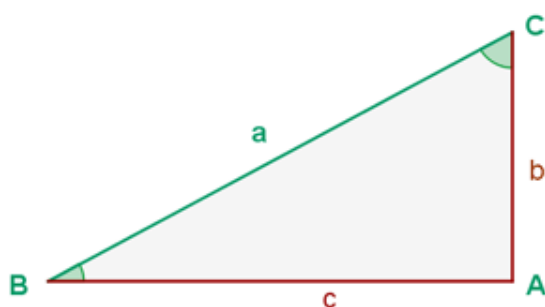


$$B: \sin B = \frac{b}{a} \quad B = \sin^{-1} \frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- Se conocen los dos catetos

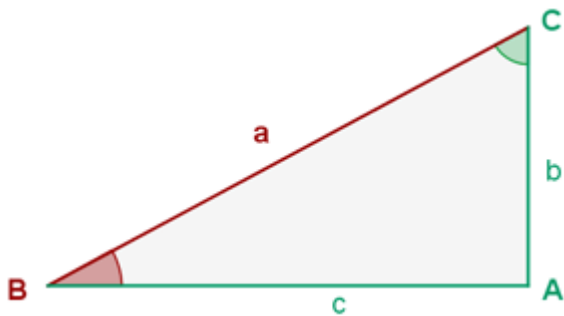


$$B: \tan B = \frac{b}{c} \quad B = \tan^{-1} \frac{b}{c}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo.

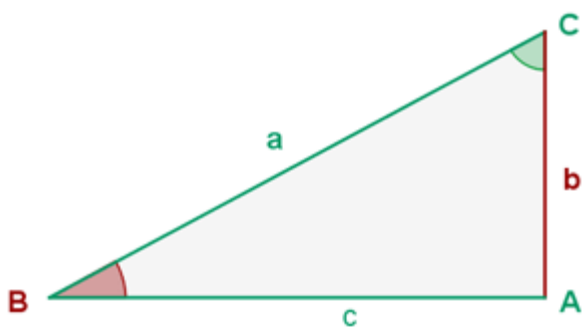


$$C = 90^\circ - B$$

$$b: \sin B = \frac{b}{a} \quad b = a \cdot \sin B$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

- Se conocen un cateto y un ángulo agudo.



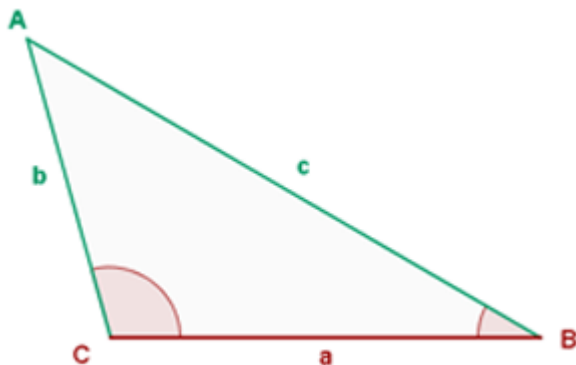
$$C = 90^\circ - B$$

$$a: \sin B = \frac{b}{a} \quad a = \frac{b}{\sin B}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS

1) Resolver un triángulo conociendo un lado y dos ángulos adyacentes a él

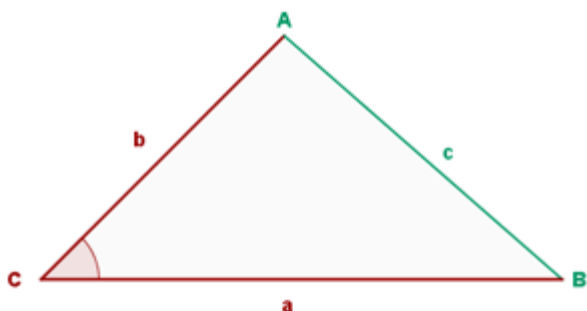


$$A = 180^\circ - B - C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$$

2) Resolver un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido

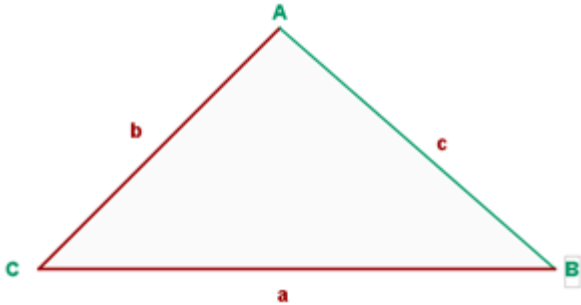


$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{c \sin C}{b}$$

$$A = 180^\circ - B - C$$

3) Resolver un triángulo conociendo los 3 lados



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$C = 180^\circ - A - B$$

CUADERNILLO DE EJERCICIOS AÑO 2012- MATEMÁTICA

Marca la opción correcta:

1) Las propiedades básicas estudiadas en la escuela secundaria son suficientes para afirmar que:

a) $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{5}{2}}$

b) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

c) $(x+5)^2 = x^2 + 25$

d) $x^3 + x = x^4$

e) $x + x = x^2$

2) Se puede medir la amplitud de los ángulos usando distintos sistemas; el sexagesimal y el radial son los más utilizados; según lo que sabes respecto a esto:

a) $\frac{\pi}{6} = 60^\circ$

b) $132,5^\circ = 132^\circ 5'$

c) $\frac{5}{4} \cdot \pi = 225^\circ$

d) El suplemento de un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ es 60°

e) Un ángulo de 1 radián mide aproximadamente 360°

3) La única afirmación verdadera de las que siguen es:

a) $\text{sen } x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

b) $\text{cos } x = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

c) $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \beta = 1$

d) $2 \cdot \text{sen} \beta = \text{sen}(2\beta)$

e) $\text{cos } \alpha = 1,7$

4) Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} x + 2y = 3x - 2 \\ 2x - 3y = 2y + 3 \end{cases}$, podemos afirmar que:

- a) Tiene infinitas soluciones.
b) Es incompatible.
c) La solución es $x = -3$ e $y = -4$
d) La única solución del sistema es $(1; 0)$
e) La solución es $(2/3; -1/3)$
- 5) Dada la función $f(x) = -2x + 3$, de su análisis se deduce que:
- a) El dominio es el conjunto formado por los números reales positivos.
b) Es una función creciente.
c) La pendiente es negativa.
d) Corta al eje vertical en $y = -2$
e) Interseca al eje horizontal en $x = -2$.
- 6) La función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$ tiene como gráfica una parábola. La única aseveración correcta respecto a la gráfica de $f(x)$ es:
- a) No tiene raíces.
b) Corta al eje horizontal en -8
c) El vértice de la parábola está en el segundo cuadrante.
d) Las ramas de la parábola son hacia arriba.
e) La gráfica muestra que es una función estrictamente creciente.
- 7) El cociente de la siguiente división de polinomios $(2x^2 + x - 6) : (x + 2)$ es:
- a) $x + 6$
b) $2x^2 - 3$
c) $2x - 3$
d) No es posible realizar la operación.
e) Las opciones anteriores son falsas.
- 8) El desarrollo de la expresión $(2x^2 - 4)^2$ es:
- a) $4x^2 - 16$
b) $4x^4 - 16$
c) $4x^4 + 16$
d) $4x^4 + 16 - 8x^2$
e) $4x^4 - 16x^2 + 16$
- 9) Según tus conocimientos respecto a las propiedades de la potenciación, la igualdad verdadera es:
- a) $\left(\frac{b^5}{b}\right)^3 = b^{16}$
b) $m^2 + m^3 = m^5$

c) $2^2 \cdot 3^3 = 6^5$

d) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-2} = a + b$

e) $\left(\frac{m^5 \cdot m}{m^3}\right)^2 = m^6$

- 10) Desde un faro se observa una nave en el mar bajo un ángulo de depresión de 30° ; ¿a qué distancia horizontal del faro se halla la nave sabiendo que el punto de observación está situado a 90m de altura sobre el nivel del mar?
- a) 155,88m
b) 77,94m
c) 45m
d) 51,96m
e) Ninguna de las anteriores
- 11) El bronce es una aleación de cobre y estaño en una proporción de 3 a 5. ¿Qué cantidad de cobre y estaño se necesitan para obtener 20 kg de bronce?
- a) 3 kg de cobre y 5 kg de estaño
b) 12 kg de cobre y 7 kg de estaño
c) 3 kg de cobre y 17 kg de estaño
d) 7,5 kg de cobre y 12,5 kg de estaño
e) Ninguna de las anteriores
- 12) La longitud de la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles, sabiendo que la longitud de cada lado congruente es de 25 cm y la longitud de la base es 5cm mayor que aquellos, es:
- a) Faltan datos para determinarlo
b) 16,58 cm
c) 24,49 cm
d) 10 cm
e) 20 cm
- 13) Dos lados consecutivos de un triángulo escaleno de 20cm y 30cm de longitud forman un ángulo de amplitud 40° ; aplicando tus conocimientos respecto a trigonometría, es posible de terminar, aproximadamente, la longitud del lado restante:
- a) 36,06 cm
b) 19,51cm
c) 47,11cm
d) 45,83cm
e) Faltan datos para determinarlo

14) Una escalera de 4m de longitud está apoyada en una pared, de modo que el pie de la escalera dista 2m de la pared; entonces, el ángulo que ésta forma con el piso es de:

- a) $\frac{\pi}{3}$
- b) $\frac{\pi}{4}$
- c) $\frac{\pi}{6}$
- d) 30°
- e) $\frac{\pi}{2}$

15) El valor de la incógnita "m" de la siguiente expresión $\frac{4m-2}{4} - 3^2 = \sqrt{25-16} - 2m$, es:

- a) -2
- b) -4/3
- c) 14/3
- d) 7/2
- e) 25/6

16) La imagen de $x = t + 2$ mediante la función $f(x) = 3x - 5$, es la expresión:

- a) $3t - 3$
- b) $3t + 6$
- c) $3t + 1$
- d) $3t - 9$
- e) Las opciones anteriores son todas falsas

17) En un triángulo rectángulo, la base mide 0,03 hm y la altura la supera en 10 dm; entonces:

- a) El área es $0,3 \text{ dm}^2$
- b) El perímetro es aproximadamente 20 dm
- c) El perímetro es 12 m
- d) El área del triángulo es 6m
- e) Las dos respuestas anteriores son verdaderas

18) El número $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ es equivalente a:

- a) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$
- b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- c) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$
- d) $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$

e) $8 - 4\sqrt{3}$

19) Según las propiedades de las operaciones fundamentales con números reales:

a) $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

b) $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$

c) $-(-a)^2 = a^2$

d) $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

e) Las opciones anteriores son falsas

20) ¿Cuál es el número positivo tal que multiplicado por su mitad es igual al doble de ese mismo número más 6?

a) seis

b) cuatro

c) dos

d) uno

e) No es posible determinarlo

21) En un triángulo rectángulo, la base mide 0,03 hm y la altura la supera en 10 dm; entonces:

a) El área es $0,3 \text{ dm}^2$

b) El perímetro es aproximadamente 20 dm

c) El perímetro es 12 m

d) El área del triángulo es 6m

e) Las dos respuestas anteriores son verdaderas

22) El 20 de febrero, se presentaron los aspirantes a ingresar a la carrera de Técnico Superior en Motores. Los preceptores los distribuyeron de la siguiente manera: el 30% en el aula 1, el 20% en el aula 2, el 25% en el aula 3 y los 60 alumnos restantes en un aula del ala del terciario. Entonces:

a) En el aula 1 se distribuyeron 18 exámenes.

b) El total de alumnos que se presentaron a rendir el examen de ingreso es 240

c) En el aula 2 rindieron 72 alumnos

d) Se presentaron a rendir 135 alumnos en total

e) No es posible realizar las afirmaciones anteriores, pues faltan datos en el enunciado del problema.

23) Un poste se quiebra. La parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de 70° . El extremo superior toca el piso a una distancia de 1,3 m del pie del poste. La altura del poste es:

a) 0,47 m

- b) 1,38 m
- c) 1,85 m
- d) 4,79 m
- e) Los datos no son suficientes para determinarlo.

24) En un partido de fútbol se cobra penal. El jugador encargado de ejecutarlo ubica la pelota a 9,15 m del arco, equidistante de ambos palos. El jugador patea, sin comba, al ras del piso, a 23° a la derecha de la línea perpendicular al arco. La longitud mínima del arco para convertir el gol es:

- a) 7,15 m
- b) 8,42 m
- c) 3,88 m
- d) 7,77 m
- e) 5,27 m

25) La expresión $\left(5^{\frac{2}{3}} \cdot p^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ es igual a :

- a) $(5p)^{\frac{2}{3}}$
- b) 1
- c) 5/p
- d) p/5
- e) Las respuestas anteriores son falsas

26) El valor exacto de el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden $2\sqrt{3}$ cm, es:

- a) 12 cm²
- b) $3\sqrt{3}$ cm²
- c) $6\sqrt{3}$ cm²
- d) 6 cm²
- e) $8\sqrt{3}$ cm²

27) Un fabricante produce dos modelos de filtros industriales A y B. La demanda del mercado indica que pueden ser vendidos 40% más de filtros A que del B. Si la producción total asciende a 1200 filtros por semestre, ¿cuántos filtros de tipo A y cuántos del B debería fabricar para ajustarse a las demandas del mercado?

- a) 800 y 400
- b) 700 y 500
- c) 1000 y 200
- d) 342,9 y 857,1
- e) Las respuestas anteriores no son verdaderas

- 28) En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7cm más que el otro, y la hipotenusa, el doble del cateto menor aumentado en 3 unidades. Entonces:
- El perímetro del triángulo es 60 cm
 - El área del triángulo es 60 cm
 - El coseno del ángulo agudo menor es 0,38 cm
 - La tangente del ángulo agudo mayor es 2,4
 - Las respuestas anteriores son falsas
- 29) Una empresa local pretende repartir, de sus utilidades, la cantidad de \$20000 entre las tres gerencias, pero de forma tal que la gerencia de compras reciba \$1000 más que la gerencia de ventas y ésta última \$2000 más que la tercera. Entonces, las cantidades recibidas por cada agencia son:
- \$5000, \$6000 y \$8000
 - \$8000, \$9000 y \$11000
 - \$4000, \$3500 y \$5000
 - \$8000, \$7000 y \$5000.
 - Las opciones anteriores son falsas
- 30) El valor que debe tomar la incógnita “y” para que la igualdad $(y + 2)^2 - (y - 2)^2 = 10y - 2$ se verdadera:
- 0
 - 2
 - 2
 - 1
 - Las opciones anteriores son falsas.

RESPUESTAS:

- b
- c
- b
- e
- c
- d
- c
- e
- e
- a
- d
- e
- b
- a
- e
- c
- c
- e
- b
- a
- c
- b

- 23) c
- 24) d
- 25) d
- 26) b
- 27) b
- 28) d
- 29) d
- 30) d